

12+

ВЕСТНИК
ПЕРМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА



Серия № 2
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

Выпуск 1–2/2016

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет»

ВЕСТНИК
ПЕРМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА

Серия № 2
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
И ЕСТЕСТВЕННЫЕ
НАУКИ

Выпуск 1–2 / 2016

Электронный научный журнал

Пермь
ПГГПУ
2016

Вестник Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета. Сер. № 2. Физико-математические и естественные науки. Вып. 1–2 / 2016: электронный научный журнал [Электронный ресурс] / ред. кол.: Д.А. Полежаев (отв. редактор), А.Е. Селиванов (отв. секретарь); В.А. Козлов, А.А. Иванова, Д.А. Брацун, А.Е. Малых, Монсеф Стамбули (Франция), С.А. Двинских, В.О. Козьминых, И.А. Золотухин, А.И. Козлов ; Перм. гос. гуманит.-пед. ун-т. – Пермь, 2016. – 67 с. – 2,91 Мб.

Объединенный выпуск 1–2 «Вестника ПГГПУ» (серия №2 «Физико-математические и естественные науки») ориентирован на ведущие направления фундаментальных и прикладных исследований в области физики, биологии, математики. Приоритетные темы серии: экосистемы Уральского региона, математическое моделирование, моделирование сложных систем в разных областях естественных наук.

Издание адресовано ученым в области физико-математических и естественных наук, аспирантам, студентам и всем тем, кто интересуется данной проблематикой.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ СЕРИИ:

В.Г. КОЗЛОВ – д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой общей и экспериментальной физики ПГГПУ
А.А. ИВАНОВА – д-р физ.-мат. наук, проф. ПГГПУ
Д.А. БРАЦУН – д-р физ.-мат. наук, доц., зав. кафедрой теоретической физики и компьютерного моделирования ПГГПУ
А.Е. МАЛЫХ – д-р физ.-мат. наук, проф. ПГГПУ
МОНСЕФ СТАМБУЛИ – проф., Центральная Школа Парижа, Франция
С.А. ДВИНСКИХ – д-р геогр. наук, проф., зав. кафедрой гидрологии и охраны водных ресурсов ПГНИУ
В.О. КОЗЬМИНЫХ – д-р хим. наук, проф., зав. кафедрой химии ПГГПУ
И.А. ЗОЛОТУХИН – д-р техн. наук, проф. кафедры ботаники ПГГПУ
И.А. КОЗЛОВ – д-р биол. наук, проф. НИИ и Музея антропологии им. Д.Н. Анучина МГУ им. М.В. Ломоносова
Д.А. ПОЛЕЖАВ – канд. физ.-мат. наук, декан физического факультета ПГГПУ (отв. редактор)
А.Е. СЕЛИВАНОВ – канд. биол. наук, зав. кафедрой ботаники ПГГПУ (отв. секретарь)

Электронный журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации средства массовой информации Эл № ФС77-54752 от 17.07.2013 г.

Журнал включен в Российский индекс научного цитирования (РИНЦ), договор № 270-04/2014 от 28.04.2014

Журнал зарегистрирован как сериальное издание в международном регистрационном каталоге (ISSN International Centre, Франция, Париж)

Сайт журнала Вестник ПГГПУ. Серия № 2 «Физико-математические и естественные науки»:

URL: <http://www.vestnik2.pspu.ru>

Электронная почта журнала: vestnikPSPU@yandex.ru – Селиванову Алексею Евгеньевичу

Печатается по решению редакционно-издательского совета ПГГПУ

© Коллектив авторов, 2016

© ФГБОУ ВПО «Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет», 2016

СОДЕРЖАНИЕ

БИОЛОГИЯ	4
<i>БЕЗГОДОВ А.Г.</i> СПИСОК ВИДОВ МХОВ, СОБРАННЫХ В БАССЕЙНЕ КОЛВЫ (ПЕРМСКИЙ КРАЙ).....	4
<i>КАПИТОНОВА О.А., СЕЛИВАНОВ А.Е., КАПИТОНОВ В.И.</i> СОСУДИСТЫЕ РАСТЕНИЯ НА ПЕСЧАНЫХ ОБНАЖЕНИЯХ В ЗАПАДНОСИБИРСКОЙ АРКТИКЕ И СУБАРКТИКЕ.....	19
<i>КУЗЬМИН И.В., КАПИТОНОВ В.И.</i> НАХОДКИ СИНАНТРОПНЫХ РАСТЕНИЙ В БЕЛОЯРСКОМ РАЙОНЕ ХАНТЫ-МАНСИЙСКОГО АВТОНОМНОГО ОКРУГА – ЮГРЫ.....	24
<i>СЕЛИВАНОВ А.Е.</i> ЛИШАЙНИКИ И МХИ В СУКЦЕССИЯХ НА ПЕСЧАНЫХ ОБНАЖЕНИЯХ В ЗАПАДНО-СИБИРСКОЙ РАВНИНЕ.....	28
ФИЗИКА	31
<i>СУББОТИН С.В., КОЗЛОВ В.Г., САБИРОВ Р.Р.</i> СТРУКТУРА ОСРЕДНЕННОГО ТЕЧЕНИЯ В СФЕРОИДАЛЬНОЙ ПОЛОСТИ, ВОЗБУЖДАЕМОГО УПРУГИМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ ГРАНИЦ.....	31
<i>СУББОТИН С.В., КРОПАЧЕВА А.С.</i> ЗАВИСИМОСТЬ ДИНАМИКИ СВОБОДНОГО ЯДРА ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПОЛОСТИ С ЖИДКОСТЬЮ ОТ ЧАСТОТЫ МОДУЛЯЦИИ СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ.....	40
<i>ЩИПИЦЫН В.Д.</i> КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА В ПОЛОСТИ С ЖИДКОСТЬЮ, СОВЕРШАЮЩЕЙ ПОСТУПАТЕЛЬНЫЕ ВИБРАЦИИ.....	51
МАТЕМАТИКА	61
<i>КРАСНОЩЕКОВ А.Л.</i> ОДНОМЕРНЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ГОЛОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ.....	61

УДК 581.9(470.53)

Безгодов Андрей Геннадьевич

e-mail: bezgodovs@list.ru

СПИСОК ВИДОВ МХОВ, СОБРАННЫХ В БАССЕЙНЕ КОЛВЫ (ПЕРМСКИЙ КРАЙ)

Andrey G. Bezgodov

A LIST OF SPECIES OF MOSSES COLLECTED IN KOLVA BASIN (PERM TERRITORY)

Аннотация: приведен список из 147 видов мхов, собранных в долинах Березовой и Колвы (Чердынский район): 112 видов собраны на береговых скалах, пять из них (*Ctenidium molluscum*, *Eurhynchium striatulum*, *Isopterygiopsis alpicola*, *Seligeria brevifolia*, *Timmia norvegica*) известны в Пермском крае только из этого района. Указаны пункты и общее число находок каждого вида.

Ключевые слова: мхи, скалы, известняки.

Abstract: the list of 147 moss species collected in Berezovaya and Kolva river valleys (Cherdyn District, Perm Territory, Russia) is given: 112 species are collected on the coastal cliffs, five of them (*Ctenidium molluscum*, *Eurhynchium striatulum*, *Isopterygiopsis alpicola*, *Seligeria brevifolia*, *Timmia norvegica*) are known only from this area within the Perm Territory. All locations and total numbers of findings are listed for each species.

Key words: mosses, cliffs, limestone.

В августе 2014 г. проведен сбор образцов мохообразных в долинах Березовой и Колвы на участке от устья р. Собачья до скалы Камень Ветлан. Основное внимание уделялось обследованию весьма многочисленных на этом участке береговых скальных обнажений. В прочих местообитаниях долин (в лесах, на береговых обрывах, бечевниках и т. п.) собрано лишь незначительное количество образцов. В общей сложности собрано около 260 полевых образцов, в которых идентифицировано около 1450 экземпляров мхов и печеночников. Надежно опознаваемые виды регистрировались также в поле.

Все обследованные скалы известняковые, за исключением Камня Бурундук и мелких обнажений ниже устья р. Неч, сложенных песчаниками и алевролитами.



Береговые обнажения существенно различаются по набору местообитаний. Так, часть из них выходит на берег реки и имеет заливаемые в паводки участки стен, на которых откладывается более или менее мощный слой аллювия (Ласткин, Серовик, Столбовой, Ежа, Боец и др.). На таких участках часто поселяются мхи, свойственные, скорее, не каменистым субстратам, а почвенным обнажениям: *Barbula unguiculata*, *Calliergonella lindbergii*, *Didymodon fallax* и т. п. Некоторые скалы (Пещерный, Ласткин, Столбовой, Еранка) несут следы пожаров различной давности, выражающиеся, среди прочего, в обеднении видового разнообразия мохообразных при повышении обилия некоторых видов, малочисленных в ненарушенных ценозах (*Ceratodon purpureus*, *Bryum argenteum*, *Bryum elegans*).

Обследованные пункты. Пункты сборов, сделанных за пределами береговых скальных обнажений, приводятся в списке полностью. Для скал используются сокращенные имена.

Названия и местоположения части береговых обнажений закреплены в описаниях особо охраняемых природных территорий [5]. Для безымянных же скал или скал, которые не удалось однозначно соотнести с каким-либо принятым названием, используются условные наименования (даны в кавычках).

«Собачья» – левый борт долины р. Березовая, 0,5 км ниже устья р. Собачья (60°49' 08" N – 58°12' 48" E).

Бурундук – долина р. Березовая, скала Камень Бурундук (60°47' 46" N – 58°06' 19" E).

«Усай» – левый борт долины р. Березовая, 1,3 км ниже устья р. Малый Усай (60°48,5' N – 57°58' E).

Пещерный – долина р. Березовая, скала Пещерный Камень (60°48' 56" N – 57°59' 05" E).

Ласткин – долина р. Березовая, скала Ласткин Камень (60°48' 53" N – 57°58' 20" E).

«Квартал 175» – правый борт долины р. Березовая в 1,5 км ниже скалы Пещерный Камень (60°49' 18" N – 57°58' 20" E).

«Квартал 174» – левый борт долины р. Березовая в 1,7 км ниже скалы Ласткин Камень (60°49' 33" N – 57°57' 26" E).

«Петух» – правый борт долины р. Березовая в 1 км выше устья р. Роднички (60°49' 49" N – 57°57' 19" E).

«Роднички» – правый борт долины р. Березовая, 300–500 м ниже устья р. Роднички (~60°50' N – ~57°56' E).

Столбовой – правый борт долины р. Березовая, скала Камень Столбовой (60°51' 32" N – 57°56' 30" E).

Варыш – долина р. Березовая, скала Камень Варыш (60°51' 52" N – 57°55' 04" E).

«Ежа» – правый борт долины р. Березовая, ~ 3 км ниже устья р. Бужуй (60°52' 56" N – 57°49' E).

Сотник – правый борт долины р. Березовая, скала Камень Сотник (60°50' 42" N – 57°46' 33" E).

Рассыпной – левый борт долины р. Березовая, скала Камень Рассыпной (Дядя) (60°50' 22" N – 57°46' 28" E).

«Еранка» – правый борт долины р. Березовая, 0,5 км ниже устья р. Еранка (60°50' 38" N – 57°45' 04" E).

Пехач – долина р. Березовая, скала Камень Пехач (60°50' 36" N – 57°43' 46" E).

Серовик – долина р. Березовая, скала Камень Серовик (60°50' 00" N – 57°43' 13" E).

«Трубаниха» – правый борт долины р. Березовая, ~ 0,4 км ниже устья р. Трубаниха (60°52' 20" N – 57°23' E).

Мулыско – долина р. Березовая, скала Камень Мулыско (60°59' 29" N – 57°15' 03" E).

Боец – долина р. Колва, скала Камень Боец (60°50' 00" N – 56°48' E).

Дивий – долина р. Колва, скала Камень Дивий (60°49' 12" N – 56°45' 17" E).

Ветлан – долина р. Колва, скала Камень Ветлан (60°47' 27" N – 56°42' 52" E).

Перечень находок. Пункты сбора в аннотациях к видам даны в порядке их расположения по течению рек сверху вниз. В круглых скобках после названия вида дано общее число находок.

Для видов, собранных 1–3 раза, дается цитата этикетки с полевым номером, наличие спорогонов (S+), место хранения. Для образцов, хранящихся в гербарии Пермского гуманитарно-педагогического университета (РПУ), акроним не указан. Все образцы собраны автором.

Abietinella abietina (Hedw.) M. Fleisch. – (48). На скалах. На всех обнажениях, кроме Бурундука.

Amblystegium serpens (Hedw.) Bruch et al. – (1). Долина р. Березовая (60°48'19"N – 57°38'34"E), смешанный мелкотравный лес, на осине, № 523, 19.08.2014.

Anomodon longifolius (Brid.) Hartm. – (31). На скалах. «Усай», Пещерный, Ласткин, «Квартал 175», «Петух», Столбовой, Варыш, «Ежа», Сотник, «Еранка», Пехач, Мулыско, Боец, Дивий, Ветлан.

Anomodon viticulosus (Hedw.) Hook. et Taylor – (26). На скалах. «Собачья», «Усай», Пещерный, Ласткин, «Квартал 175», «Петух», Столбовой, Варыш, «Ежа», Сотник, Рассыпной. Серовик, «Трубаниха», Мулыско, Дивий, Ветлан.

Barbula convoluta Hedw. – (3). «Петух»: обнажения известняков, отвесная западная стена, на хорошо освещенном сыроватом участке, по мелким уступам, № 419, 15.08.2014. Серовик: обнажения известняков в лесу на склоне, на сев.-зап. стене, на свисающем с карниза перегнутое, № 521, 19.08.2014. Боец: обнажения известняков, заросший лесом крутой щебнистый склон, на покрытой толстым слоем перегнутой отдельной глыбе, № 551, 22.08.2014.



Barbula unguiculata Hedw. – (6). На скалах, преимущественно на покрытых наилком основаниях стен, отдельных камнях. *Пещерный*, «Квартал 174», *Столбовой*, «Ежа», *Боец*.

Brachythecium campestre (Muell. Hal.) Bruch et al. – (2). Долина р. Березовая (60°48'19"N – 57°38'34"E), смешанный мелкотравный лес; на осине, № 523, 19.08.2014. *Дивий*: обнажения известняков, на ЮВ полузатененной стене, № 553, 22.08.2014.

Brachythecium rotaeanum De Not. – (1). Долина р. Колва (60°54'30"N – 56°57'E), на стволах *Salix dasyclados*, № 548, 21.08.2014.

Brachythecium cirrosum (Schwaegr.) Schimp. – (12). На скалах. «Квартал 175», «Ежа», *Сотник*, *Пехач*, *Серовик*, *Ветлан*.

Brachythecium erythrorrhizon Bruch et al. – (3). *Ласткин*: обнажения известняков в лесу на склоне, на затененной сыроватой восточной стене, № 349, 15.08.2014. *Мулыско*: обнажения известняков, на западной открытой сухой очень неровной стене, № 532, 20.08.2014. МНА, РПУ. *Дивий*: в подножии тенистой западной стены, № 559, 22.08.2014.

Brachythecium glareosum (Bruch ex Spruce) Bruch et al. – (48). На скалах. «Собачья», *Пещерный*, *Ласткин*, «Квартал 175», «Квартал 174», «Петух», *Столбовой*, *Варыш*, «Ежа», *Сотник*, *Рассыпной*, «Еранка», *Пехач*, *Серовик*, *Боец*, *Дивий*, *Ветлан*.

Brachythecium mildeanum (Schimp.) Schimp. ex Milde – (1). Долина р. Колва ниже устья р. Неч (60°56'46"N – 56°58'34"E), на заливаемых в паводки мелких обнажениях песчаника, № 546, 21.08.2014.

Brachythecium rivulare Bruch et al. – (3). Долина р. Березовая, урочище Бурундук (60°47'46"N – 58°06'19"E), в русле ручья, на древесине, чуть выше воды, № 331, 14.08.2014. *Ласткин*: у подножия, на камнях в ручье, № 340, 15.08.2014. *Ветлан*: обнажения известняков, в основании северной стены, № 570, 22.08.2014.

Brachythecium tommasinii (Sendtn. ex Boulay) Ignatov et Huttunen – (21). На скалах. «Собачья», «Усай», *Пещерный*, *Ласткин*, *Варыш*. До сих пор на Урале был известен только из бассейна верхней Печоры, однако в 2014 г. кроме долины Березовой обнаружен еще и на Яйве: скала Соколий Камень (leg. Н.А. Зенкова, Н.В. Москвина, образец в РПУ).

Bryoerythrophyllum recurvirostrum (Hedw.) P.C. Chen – (20). Долина р. Колва (60°54'30"N – 56°57'E), на стволах *Salix dasyclados*, № 547, 21.08.2014. S+. А также на покрытых перегноем или, реже, наилком скалах «Собачья», «Усай», *Пещерный*, «Квартал 174», «Петух», *Столбовой*, *Варыш*, «Ежа», *Сотник*, *Рассыпной*, *Серовик*, «Трубаниха», *Мулыско*, *Дивий*, *Ветлан*.

Bryum argenteum Hedw. – (3). На покрытых перегноем скалах. *Пещерный*, *Столбовой*, «Трубаниха».

Bryum bitum (Schreb.) Turner – (1). Долина р. Березовая, урочище Бурундук (60°47'46"N – 58°06'19"E); в русле ручья, на древесине, чуть выше воды, № 331, 14.08.2014. S+.

Bryum capillare Hedw. – (18). На скалах. Ласткин, «Роднички», Варьш, Сотник, «Еранка», Пехач, Мулыско, Боец, Ветлан.

Bryum creberrimum Taylor – (4). На скалах. Пещерный, Столбовой, «Трубаниха».

Bryum elegans Nees ex Brid. – (3). Бурундук: на вершине, на тропе, № 332, 14.08.2014. Столбовой: окруженные старой гарью высокие известняковые скалы в верхней части склона, на отвесной гладкой южной стене по мелким трещинам, № 447, 16.08.2014. MW, PPU. Пехач: обнажения известняков, на отвесной освещенной ЮВ стене по мелким уступам вблизи подножия, № 509, 18.08.2014.

Bryum funkii Schwaegr. – (1). Боец: обнажения известняков, заросший лесом крутой щебнистый склон, на покрытой толстым слоем перегноя отдельной глыбе, № 551, 22.08.2014.

Bryum lonchocaulon Muell. Hal. – (2). Ласткин: обнажения известняков в лесу на склоне, на затененной сыроватой восточной стене по небольшим карнизам, № 351, 15.08.2014. «Квартал 174»: обнажения известняков, на уходящей в воду стене, выше уровня паводков, № 407, 15.08.2014. S+.

Bryum moravicum Podp. – (4). Долина р. Колва (60°54'30"N – 56°57'E), на стволах *Salix dasyclados*, № 547, 21.08.2014. А также на скалах: «Квартал 175», «Петух», Столбовой.

Bryum pallens Sw. ex anon. – (1). Ласткин: в образце *Timtia norvegica* № 343, 15.08.2014. MW, PPU.

Calliergonella lindbergii (Mitt.) Hedenaes – (3). Нередок по глинистым и каменистым берегам. Иногда – на скалах по покрытым наилком заливаемым в паводки основаниям стен: «Ежа», Серовик.

Campyliadelphus chrysophyllus (Brid.) R.S. Chopra – (49). На скалах. «Собачья», «Усай», Пещерный, Ласткин, «Квартал 175», «Квартал 174», «Петух», Столбовой, Варьш, Рассыпной, Пехач, Серовик, Мулыско, Боец, Дивий, Ветлан.

Campylidium calcareum (Crundw. et Nyholm) Ochyra – (6). На скалах. Пещерный, Варьш, «Ежа», Боец, Ветлан.

Campylidium sommerfeltii (Myrin) Ochyra – (1). Долина р. Колва (60°54'30"N – 56°57'E), на стволах *Salix dasyclados*, № 547, 21.08.2014.

Campylium protensum (Brid.) Kindb. – (4). Серовик: на заливаемых в паводки основаниях стен, а также выше уровня паводков на сильно затененных сыроватых северных и северо-западных стенах. № 514, 526. MW, PPU.

Campylophyllum halleri (Hedw.) M. Fleisch. – (16). На скалах. Пещерный, Ласткин, «Петух», Варьш, Сотник, «Еранка», Пехач, Серовик, Боец, Ветлан.

Ceratodon purpureus (Hedw.) Brid. – (6). На почве по береговым обрывам, на покрытых наилком отдельных камнях и основаниях стволов деревьев. А также на скалах: Пещерный, Варьш, Мулыско.



Cirriphyllum piliferum (Hedw.) Grout – (1). *Ветлан*: обнажения известняков, заросшая лесом каменная осыпь у подножия, № 565, 22.08.2014. [в образце *Thuidium recognitum*].

Cratoneuron filicinum (Hedw.) Spruce – (3). Долина р. Березовая, урочище Бурундук (60°47'46"N –58°06'19"E), в русле ручья, на древесине, чуть выше воды, № 330, 14.08.2014. *Ласткин*: у подножия, на камнях в ручье, № 340, 15.08.2014. *Дивий*: на берегу Колвы, на камнях в руслах быстрых ручьев, № 562, 22.08.2014.

Stenidium molluscum (Hedw.) Mitt. – (2). *Серовик*: довольно многочислен на тенистых северных и северо-западных стенах (№ 522, 19.08.2014, MW, PPU; № 514, 18.08.2014). Единственное известное в данный момент местонахождение в крае. Указание П.В. Сюзева [6] о находке этого вида в окрестностях Очёра позднее было признано ошибочным на основании проверки части образцов [7].

Cyrtomnium humenophylloides (Huebener) Nyholm ex T.J. Кор. – (18). На скалах. «Собачья», *Ласткин*, *Столбовой*, *Сотник*, *Рассыпной*, *Серовик*.

Dichodontium pellucidum (Hedw.) Schimp. – (2). *Дивий*: на берегу Колвы, на камнях в руслах быстрых ручьев, № 561, 22.08.2014. *Ветлан*: обнажения известняков, в основании северной стены, № 570, 22.08.2014.

Dicranella grevilleana (Brid.) Schimp. – (1). *Серовик*: обнажения известняков по берегу, по заливаемому в паводки подножию, № 511, 18.08.2014.

Dicranum fragilifolium Lindb. – (2). «Собачья»: обнажения известняков, крутой заросший лесом склон возле скал, на покрытом толстым слоем перегноя каменном уступе, № 322, 14.08.2014. *Ласткин*: мелкотравный березняк на крутом склоне между скал, на гнилой древесине, № 367, 15.08.2014. S+.

Dicranum fuscescens Turner – (1). «Собачья»: обнажения известняков, крутой заросший лесом склон возле скал, на покрытом толстым слоем перегноя каменном уступе, № 322, 14.08.2014.

Dicranum scoparium Hedw. – (1). *Бурундук*. Вместе с *Bryum elegans* (№ 332, 14.08.2014).

Didymodon fallax (Hedw.) R.H. Zander – (3). *Серовик*, *Ветлан*. На наилке в основаниях выходящих на берег стен.

Didymodon ferrugineus (Schimp. ex Besch.) M.O. Hill – (23). На скалах. «Собачья», «Усай», *Пещерный*, *Ласткин*, «Квартал 175», «Квартал 174», *Столбовой*, *Варыш*, «Ежа», *Сотник*, «Еранка», «Трубаниха», *Боец*.

Didymodon istadophilus (Schimp. ex Muell. Hal.) K. Saito – (8). На скалах. *Пещерный*, *Ласткин*, «Квартал 175», «Роднички», *Столбовой*, «Ежа», «Еранка», *Ветлан*.

Didymodon rigidulus Hedw. – (37). На скалах. «Собачья», «Усай», *Пещерный*, *Ласткин*, «Квартал 175», «Петух», *Столбовой*, *Варыш*, «Ежа», *Сотник*, *Рассыпной*, «Еранка», *Пехач*, *Боец*, *Дивий*, *Ветлан*.

Didymodon validus Limpr. – (8). На скалах. «Собачья», *Пещерный*, *Ласткин*, «Петух», *Рассыпной*, «Трубаниха».

Distichium capillaceum (Hedw.) Bruch et al. – (11). На скалах. «Усай», Ласткин, «Квартал 174», «Петух», Столбовой, Сотник, Пехач, Серовик, «Трубаниха», Ветлан.

Ditrichum flexicaule (Schwaegr.) Hampe – (40). На скалах. «Собачья», «Усай», Пещерный, Ласткин, «Квартал 175», «Роднички», Столбовой, Варыш, «Ежа», Сотник, «Еранка», Пехач, Серовик, Мулыско, Боец, Дивий, Ветлан.

Ditrichum gracile (Mitt.) Kuntze – (19). На скалах. Пещерный, Ласткин, Сотник, Рассыпной, Пехач, Серовик, Ветлан.

Ditrichum pusillum (Hedw.) Hampe – (1). «Петух»: обнажения известняков, отвесная западная стена, на хорошо освещенном сыроватом участке, по мелким уступам, № 419, 15.08.2014.

Drepanium recurvatum (Lindb. et Arnell) G. Roth – (41). На скалах. «Собачья», «Усай», Пещерный, Ласткин, «Квартал 175», «Петух», Варыш, «Ежа», Сотник, Рассыпной, «Еранка», Пехач, «Трубаниха», Мулыско, Боец, Дивий, Ветлан.

Encalypta pilifera Funck – (2). Столбовой: окруженные старой гарью известняковые скалы в нижней части склона, на наклонной сухой южной стене, № 438, 16.08.2014. S+. MW, PPU. «Трубаниха»: обнажения известняков, вблизи подножия, по расщелинам, № 528, 19.08.2014. S+.

Encalypta rhabdocarpa Schwaegr. – (7). На скалах. «Собачья», Ласткин, Столбовой, «Ежа», Сотник, Серовик, Боец. S+.

Encalypta cf. *streptocarpa* Hedw. – (42). На скалах. «Собачья», «Усай», Пещерный, Ласткин, «Квартал 175», «Петух», «Роднички», Столбовой, Варыш, «Ежа», Сотник, Рассыпной, «Еранка», Пехач, Мулыско, Боец, Дивий, Ветлан. Все образцы стерильные и неотличимы от *E. procera* Bruch.

Encalypta cf. *vulgaris* Hedw. – (1). Пещерный: обнажения известняков, в затененном подножии южной стены, № 373, 15.08.2014. S+.

Entodon concinnus (De Not.) Paris – (12). На скалах. «Квартал 175», Столбовой, Варыш, Сотник, Рассыпной, Серовик, Дивий, Ветлан.

Eurhynchium pulchellum (Hedw.) Jenn. – (34). Долина р. Березовая (60°48'19"N – 57°38'34"E), смешанный мелкотравный лес, на осине, № 523, 19.08.2014. S+. Часто на скалах: «Собачья», «Усай», Ласткин, «Квартал 175», «Квартал 174», «Петух», Столбовой, Варыш, «Ежа», Сотник, Рассыпной, Серовик, Мулыско, Боец, Дивий, Ветлан.

Eurhynchium striatulum (Spruce) Schimp. – (1). Рассыпной: обнажения известняков, по небольшим карнизам, № 501, 18.08.2014. MW, PPU. Единственное известное на данный момент местонахождение на Урале. Ближайшие пункты – в Карелии [4].

Fissidens viridulus (Sw.) Wahlenb. – (1). Долина р. Колва (60°54'30"N – 56°57'E), на стволах *Salix dasyclados*, № 547, 21.08.2014. S+.

Funaria hygrometrica Hedw. – (1). «Петух»: обнажения известняков, отвесная западная стена, на хорошо освещенном сыроватом участке, по мелким уступам, № 419, 15.08.2014. S+.



Grimmia teretinervis Limpr. – (10). На скалах. *Пещерный*, «*Квартал 175*», «*Роднички*», *Столбовой*, *Сотник*, *Рассыпной*, «*Еранка*», *Мулыско*, *Ветлан*.

Grimmia tergestina Tomm. ex Bruch et al. – (3). *Столбовой*: обнажения известняков, небольшая тенистая скала в лесу у подножия склона, № 424, 16.08.2014. «*Трубаниха*»: обнажения известняков, по стенам выше уровня паводков, № 525, 19.08.2014. *Мулыско*: обнажения известняков, на западной открытой сухой очень неровной стене, № 533, 20.08.2014.

Gymnostomum aeruginosum Sm. – (26). На скалах. «*Собачья*», «*Усай*», *Пещерный*, *Ласткин*, «*Квартал 175*», *Столбовой*, *Варыш*, «*Ежа*», *Сотник*, *Рассыпной*, «*Трубаниха*», *Мулыско*, *Дивий*, *Ветлан*.

Helodium blandowii (F. Weber et D. Mohr) Warnst. – Долина р. Колва ниже устья р. Неч (60°56'46"N – 56°58'34"E), на заливаемых в паводки мелких обнажениях песчаника, № 546, 21.08.2014.

Homalia trichomanoides (Hedw) Bruch et al. – (1). Долина р. Колва (60°54'30"N – 56°57'E), на стволах *Salix dasyclados*, № 548, 21.08.2014.

Homalothecium sericeum (Hedw.) Bruch et al. – (1). «*Квартал 175*»: обнажения известняков, на южной сухой полузатененной стене по уступам, № 397, 15.08.2014. MW, PPU.

Hugrohypnella ochracea (Turner ex Wilson) Ignatov et Ignatova – (1). Долина р. Березовая, урочище Бурундук (60°47'46"N – 58°06'19"E), в русле ручья, на древесине, чуть выше воды, № 330, 14.08.2014. MW, PPU.

Hugrohypnum luridum (Hedw.) Jenn. – (22). На скалах: преимущественно на заливаемых в паводки участках, но на тенистых сырых стенах встречается и вдали от реки. «*Собачья*», *Пещерный*, *Ласткин*, «*Квартал 174*», «*Петух*», *Столбовой*, «*Ежа*», *Сотник*, *Серовик*, *Дивий*, *Ветлан*.

Hylacomiastrum rupeaicum (Spruce) M. Fleisch. – *Ветлан*: обнажения известняков, заросшая лесом каменная осыпь у подножия, № 564, 22.08.2014.

Hylacomium splendens (Hedw.) Bruch et al. – (6). Часто на покрытых лесом вершинах скал и каменистых склонах; непосредственно на стенах относительно редко и, как правило, в смеси с другими видами. «*Собачья*», *Сотник*, *Серовик*, *Мулыско*, *Ветлан*.

Hurum cupressiforme Hedw. – (5). На скалах. «*Квартал 175*», *Мулыско*, *Ветлан*.

Isopterygiopsis alpicola (Lindb. et Arnell) Hedenaes – (1). «*Собачья*»: обнажения известняков, в тенистом подножии восточной стены, на толстом слое перегноя, № 307, 14.08.2014. Единственное местонахождение в Пермском крае. На Урале по единичным находкам известен из Республики Коми [3].

Leptobryum pyriforme (Hedw.) Wilson – (4). На скалах. *Сотник*, *Серовик*, *Ветлан*.

Leskea polycarpa Hedw. – (1). Долина р. Колва (60°54'30"N – 56°57'E), на стволах *Salix dasyclados*, № 547, 21.08.2014. S+.

Leucodon sciuroides (Hedw.) Schwaegr. – (15). На скалах. «*Усай*», *Пещерный*, «*Петух*», *Столбовой*, *Варыш*, «*Еранка*», *Пехач*, «*Трубаниха*», *Мулыско*, *Дивий*, *Ветлан*.

Mnium marginatum (Dicks.) P. Beauv. – (15). На скалах. «Собачья», Ласткин, «Квартал 175», «Петух», Варыш, «Ежа», Дивий, Ветлан.

Mnium spinosum (Voit) Schwaegr. – Дивий: обнажения известняков, в лесу на склоне у подножия скал, № 556, 22.08.2014. MW, PPU.

Mnium stellare Hedw. – (9). На скалах. Ласткин, Варыш, Серовик, Ветлан.

Mnium thomsonii Schimp. – (17). На скалах. Ласткин, «Квартал 175», «Петух», Столбовой, «Ежа», Сотник, Серовик.

Molendoa sendtneriana (Bruch et al.) Limpr. – (2). «Квартал 174»: обнажения известняков; на уходящей в воду стене, выше уровня паводков, № 405, 15.08.2014. MW, PPU. Столбовой: обнажения известняков; выходящая на берег южная стена: в трещинах, выше уровня паводков, № 435, 16.08.2014. MW, PPU.

Myrinia pulvinata (Wahlenb.) Schimp. – (1). Вместе с *Brachythecium rotaeanum* (№ 548, 21.08.2014).

Myurella julacea (Schwaegr.) Bruch et al. – (27). На скалах. «Собачья», «Усай», Ласткин, «Квартал 175», «Петух», «Роднички», Столбовой, Варыш, «Ежа», Сотник, «Еранка», Пехач, Ветлан.

Myurella sibirica (Muell. Hal.) Reimers (*M. gracilis* (Weinm.) Lindb.) – (8). На скалах. «Ежа», Сотник, Рассыпной. Издан также образец К.Н. Игошиной с Камня Дивий [6].

Neckera bessi (Lobarz.) Jur. – (25). На скалах. «Собачья», «Усай», Пещерный, Ласткин, «Квартал 175», «Петух», Столбовой, Варыш, Сотник, Рассыпной, «Еранка», Серовик, Мулыско, Дивий, Ветлан.

Neckera pennata Hedw. – (1). Долина р. Березовая (60°48'19"N – 57°38'34"E), смешанный мелкотравный лес: на осине, № 523, 19.08.2014. S+.

Oncophorus wahlenbergii Brid. – (1). Долина р. Колва (60°54'30"N – 56°57'E), на стволах *Salix dasyclados*, № 547, 21.08.2014.

Orthothecium intricatum (Hartm.) Bruch et al. – (32). На скалах. «Собачья», «Усай», Ласткин, «Квартал 175», Столбовой, Варыш, «Ежа», Сотник, Рассыпной, Пехач, Серовик, Боец, Дивий, Ветлан.

Orthothecium strictum Lorentz – (1). Рассыпной: обнажения известняков, в нишах и расщелинах, № 503, 18.08.2014. MW, PPU.

Orthotrichum anomalum Hedw. – (7). На скалах. «Собачья», Пещерный, Ласткин, «Петух», Столбовой.

Orthotrichum cirpulatum Brid. – (8). На скалах. Ласткин, Столбовой, Варыш, Сотник, Рассыпной, «Трубаныха».

Orthotrichum obtusifolium Brid. – (2). Варыш: обнажения известняков, на растущей возле отвесной стены березе, № 455, 17.08.2014 [вместе с *O. pallens*]. Долина р. Березовая (60°48'19"N – 57°38'34"E), смешанный мелкотравный лес: на осине, № 524, 19.08.2014 [в образце *Pylaisia selwynii*].

Orthotrichum pallens Bruch ex Brid. – (1). Варыш: обнажения известняков, на растущей возле отвесной стены березе, № 455, 17.08.2014. S+. Ранее не отмечался севернее Кунгурского района.

Orthotrichum pellucidum Lindb. – (1). «Петух»: обнажения известняков, на отвесной тенистой западной стене, № 410, 15.08.2014. det. В.Э. Федосов S+. MW. В Пермском крае был известен по единственной находке в заповеднике «Вишерский» [8].

Orthotrichum speciosum Nees – (2). Долина р. Березовая, ~2 км ниже пос. Вижай (60°54'40"N – 57°52'E), на нижних ветвях молодой пихты, № 465, 17.08.2014. S+. Долина р. Березовая (60°48'19"N – 57°38'34"E), смешанный мелкотравный лес: на осине, № 523, 19.08.2014. S+.

Palustriella commutata (Hedw.) Ochyra – (3). Ласткин: у подножия, на камнях в ручье, № 341, 15.08.2014. MW, PPU. Дивий: на берегу Колвы, на камнях в руслах быстрых ручьев, № 561, 562, 22.08.2014. MW, PPU.

Philonotis fontana (Hedw.) Brid. – (1). Долина р. Колва ниже устья р. Неч (60°56'46"N – 56°58'34"E), на заливаемых в паводки мелких обнажениях песчаника, № 546, 21.08.2014.

Plagiomnium confertidens (Lindb. et Arnell) T.J. Кор. – (7). На скалах. «Собачья», «Усай», Ласткин, «Петух», Столбовой, Варыш, «Ежа», Сотник.

Plagiomnium cuspidatum (Hedw.) T.J. Кор. – (1). Часто в светлых смешанных и березовых лесах на крутых каменистых склонах возле скал.

Plagiomnium rostratum (Schrad.) T.J. Кор. – (9). На скалах. «Собачья», Ласткин, «Петух», Варыш, Серовик.

Plagiopus oederianus (Sw.) H.A. Crum et L.E. Anderson – (21). На скалах. «Собачья», Ласткин, «Петух», Столбовой, «Ежа», Сотник, Рассыпной, Пехач, Серовик, Ветлан.

Plagiothecium cavifolium (Brid.) Z. Iwats. – (1). Долина р. Колва (60°54'30"N – 56°57'E), на стволах *Salix dasyclados*, № 547, 21.08.2014.

Platydictya jungermannioides (Brid.) H.A. Crum – (18). На скалах. «Собачья», «Усай», Ласткин, «Квартал 175», Варыш, «Ежа», Сотник, Боец, Ветлан.

Pleurozium schreberi (Brid.) Mitt. – (1). Обычен на заросших вершинах скал, в различных лесах. На стенах обнажений редок: Ласткин.

Rogonatum urnigerum (Hedw.) P. Beauv. – (1). Бурундук: зеленомошный лес на склоне, под вывалом, № 333, 14.08.2014.

Pohlia cruda (Hedw.) Lindb. – (22). На скалах. «Собачья», «Усай», Пещерный, Ласткин, «Квартал 174», «Петух», Столбовой, Варыш, «Ежа», Сотник, Серовик, Ветлан.

Pohlia nutans (Hedw.) Lindb. – (1). Бурундук: вместе с *Rogonatum utnigerum*.

Pohlia proligera (Lindb. ex Breidl.) Lindb. ex Arnell – (1). Ветлан: обнажения известняков, заросшая лесом каменная осыпь у подножия, на обнаженной почве, № 563, 22.08.2014.

Pohlia wahlenbergii (F. Weber et D. Mohr) A.L. Andrews – (1). Долина р. Березовая, урочище Бурундук (60°47'46"N – 58°06'19"E), в русле ручья, на древесине, чуть выше воды, № 331, 14.08.2014.

Pseudoleskeella catenulata (Brid. ex Schrad.) Kindb. – (20). На скалах. «Собачья», Пещерный, Ласткин, «Квартал 175», «Роднички», Столбовой, «Ежа», Сотник, Рассыпной, Пехач, «Трубаниха», Мулыско.

Pseudoleskeella nervosa (Brid.) Nyholm – (1). Варьш: обнажения известняков, на растущей возле отвесной стены березе, № 455, 17.08.2014.

Pseudoleskeella rupestris (Berggr.) Hedenaes et L. Soederstr. – (22). На скалах. «Усай», Пещерный, Ласткин, «Квартал 174», «Петух», Варьш, «Ежа», Сотник, «Еранка», «Трубаниха», Мулыско, Дивий, Ветлан.

Pseudoleskeella tectorum (Funck ex Brid.) Kindb. ex Broth. – (11). На скалах. «Собачья», Бурундук, Пещерный, «Квартал 175», «Петух», Варьш, «Трубаниха», Мулыско, Дивий.

Pylaisia polyantha (Hedw.) Bruch et al. – (4). Часто в лесах на стволах лиственных пород.

Pylaisia selwynii Kindb. – (1). Долина р. Березовая (60°48'19"N – 57°38'34"E), смешанный мелкотравный лес: на осине, № 524, 19.08.2014.

Rhizomnium punctatum (Hedw.) T.J. Кор. – (1). Ветлан: обнажения известняков, в основании северной стены, № 570, 22.08.2014.

Rhytidiadelphus subpinnatus (Lindb.) T.J. Кор. – (1). Ветлан: вместе с *Hylocomiastrum pyrenaicum*.

Rhytidium rugosum (Hedw.) Kindb. – (11). На скалах. «Усай», Пещерный, Ласткин, Столбовой, Рассыпной, «Еранка», Серовик, Мулыско, Боец, Дивий.

Sanionia uncinata (Hedw.) Loeske – (6). Часто в лесах. Иногда – на покрытых перегноем скалах как примесь к другим мхам: «Собачья», Ласткин, Варьш.

Schistidium apocarpum (Hedw.) Bruch et al. s. str. – (3). «Ежа»: обнажения известняков, на выходящих на берег стенах, выше уровня паводков, № 468, 17.08.2014. S+. MW, PPU. Мулыско: обнажения известняков, на западной открытой сухой очень неровной стене, № 533, 20.08.2014. S+. MW, PPU. Дивий: обнажения известняков, на ЮВ полузатененной стене, № 553, 22.08.2014. S+.

Schistidium boreale Poelt – (8). На скалах. Пещерный, Ласткин, Сотник, Рассыпной, Пехач.

Schistidium rivulare (Brid.) Podp. – (6). На заливаемых в паводки основаниях скал, отдельных глыбах. Бурундук, Пещерный, «Квартал 174», Варьш, «Ежа», Сотник.

Schistidium pulchrum Н.Н. Влом – (2). Пещерный: обнажения известняков, каменные россыпи у подножия, на вертикальной стенке большой глыбы, № 383а, 15.08.2014. MW, PPU. Сотник: отдельные небольшие известняковые скалы, заливаемые в высокие паводки, на пологой неровной стене, № 478а, 18.08.2014. S+. MW.

Schistidium submuticum Broth. ex Н.Н. Влом – (9). На скалах. Пещерный, «Ежа», «Еранка», Пехач, «Трубаниха», Мулыско, Боец.



Sciuro-hypnum curtum (Lindb.) Ignatov – (1). «Собачья»: обнажения известняков, на восточной стене в тенистой нише, № 309, 14.08.2014. [в образце *Mnium marginatum*, единичные побеги].

Sciuro-hypnum populeum (Hedw.) Ignatov et Huttunen – (1). Пещерный: заливаемая в паводки большая глыба известняка на берегу, № 384, 15.08.2014.

Sciuro-hypnum reflexum (Starke) Ignatov et Huttunen – (1). Долина р. Мулысиха (60°59'29"N – 57°15'03"E); в пойме, под зарослями крапивы, № 545, 20.08.2014.

Sciuro-hypnum starkei (Brid.) Ignatov et Huttunen – (1). Вместе с *Plagiothecium cavifolium*.

Seligeria brevifolia (Lindb.) Lindb. – (1). Ветлан: обнажения известняков, в тенистом подножии отвесной стены, № 588, 22.08.2014, det. Федосов. S+. MW, PPU. Единственное известное местонахождение в Пермском крае. Ранее цитировавшиеся под этим именем образцы [1, 2] были отнесены В.Э. Федосовым к *S. tristichoides* в результате ревизии образцов этого рода с территории России.

Seligeria campylopoda Kindb. – (3). «Собачья»: обнажения известняков, в тенистой нише у подножия восточной стены, № 316, 14.08.2014. S+. Серовик: обнажения известняков лесу на склоне, на небольшом довольно сухом уступе сев.-западной, очень неровной стены, № 520, 19.08.2014. S+. MW, PPU. Ветлан: обнажения известняков, на сырой стене, № 582, 22.08.2014. S+.

Seligeria donniana (Sm.) Muell. Hal. – (4). На скалах по тенистым, более или менее сырým стенам. «Собачья», «Ежа», Ветлан.

Seligeria pusilla (Hedw.) Bruch et al. – (5). На скалах. Столбовой, Варыш, Ветлан.

Seligeria tristichoides Kindb. – (4). На скалах. «Квартал 175», Варыш, «Ежа», Сотник. Цитировавшийся ранее [2] образец *S. brevifolia* (№ 469, 17.08.2014) также отнесен В.Э. Федосовым к этому виду.

Stereodon vaucheri (Lesq.) Lindb. ex Broth. – (33). На скалах. «Усай», Пещерный, Ласткин, «Квартал 175», «Петух», «Роднички», Столбовой, Варыш, «Ежа», Сотник, «Еранка», Пехач, «Трубаниха», Мулыско, Боец, Дивий.

Taxiphyllum wissgrillii (Garov.) Wijk et Margad. – (13). На скалах. «Собачья», «Усай», Пещерный, «Квартал 175», «Петух», Столбовой, Варыш, Ветлан.

Tetraphis pellucida Hedw. – (1). «Собачья»: вместе с *Dicranum fuscescens*.

Thuidium assimile (Mitt.) A. Jaeger – (16). На скалах. «Собачья», «Усай», Ласткин, «Квартал 175», «Петух», Столбовой, Сотник, Рассыпной, Серовик, Ветлан.

Thuidium recognitum (Hedw.) Lindb. – (1). Ветлан: обнажения известняков, заросшая лесом каменная осыпь у подножия, № 565, 22.08.2014.

Timmia austriaca Hedw. – (2). Ласткин: заливаемые в паводки мелкие скалы по берегу, № 342, 15.08.2014. MW, PPU. Серовик: обнажения известняков по берегу, по заливаемому в паводки подножию, № 511, 18.08.2014.

Timmia bavarica Hessel. – (1). Варыш: обнажения известняков, на полу глубокого грота по камням, № 450, 17.08.2014.

Timmia comata Lindb. et Arnell – (22). На скалах. «Собачья», «Усай», Пещерный, Ласткин, «Квартал 174», «Петух», Столбовой, Варыш, «Ежа», Сотник, Рассыпной, Ветлан.

Timmia megarolitana Hedw. – (2). Ветлан: обнажения известняков, в тенистом подножии северной стены, № 576, 22.08.2014. Там же: на светлой, пологой, довольно сырой стене, № 581, 22.08.2014. MW, PPU.

Timmia norvegica J.E. Zetterst. – (2). Ласткин: заливаемые в паводки мелкие скалы по берегу, № 343, 15.08.2014. MW, PPU. Столбовой: обнажения известняков, выходящая на берег южная стена, на заливаемом в паводки основании, № 436, 16.08.2014. Более нигде в Пермском крае неизвестен.

Tortella alpicola Dixon – (2). Ласткин: обнажения известняков в лесу на склоне, на северной стене, № 346, 15.08.2014. «Ежа»: обнажения известняков, на сырой, слегка притененной сев.-зап. стене, № 473, 17.08.2014.

Tortella bambergeri (Schimp.) Broth. – (31). На скалах. «Собачья», «Усай», Пещерный, Ласткин, «Квартал 175», «Роднички», Столбовой, Варыш, Сотник, Рассыпной, «Еранка», Пехач, Серовик, «Трубаниха», Мулыско.

Tortella tortuosa (Hedw.) Limpr. – (17). На скалах. Ласткин, Варыш, Сотник, Рассыпной, «Еранка», Пехач, Дивий, Ветлан.

Tortula micronifolia Schwaegr. – (2). Бурундук: обнажения песчаников, на западной стене, № 329, 14.08.2014. S+. Боец: обнажения известняков, заросший лесом крутой щебнистый склон, на покрытой толстым слоем перегноя отдельной глыбе, № 551, 22.08.2014. S+.

Tortula ruralis (Hedw.) Gaertn. et al. – (23). На скалах. Пещерный, Ласткин, «Квартал 175», «Петух», Столбовой, Варыш, «Ежа», Сотник, «Еранка», «Трубаниха», Мулыско, Боец, Дивий, Ветлан.

Trichostomum crispulum Bruch – (6). На скалах. Ласткин, «Квартал 175», «Еранка», Серовик, Ветлан.

Исключаемый вид

Schistidium sibiricum Ignatova et H.H. Blom – Сообщение [2] о находке этого вида в Пермском крае (скала Ласткин Камень на р. Березовой) ошибочно.

Таким образом, на обследованном участке долин Березовой и Колвы зарегистрировано 147 видов мхов, в том числе 110–113 видов – на береговых скалах. Из них пять: *Stenidium molluscum*, *Eurhynchium striatulum*, *Isopterygiopsis alpicola*, *Seligeria brevifolia*, *Timmia norvegica* – известны в Пермском крае только отсюда. Своеобразие флоры петрофильных мхов этого района, отличающее его от всех прочих обследованных к настоящему моменту речных долин Пермского края, выражается также в высоком разнообразии *Seligeria* (здесь собраны все пять известных в крае видов); в высокой частоте и обилии *Brachythecium glareosum*, *Entodon concinnus*, *Myurella sibirica*, *Orthothecium intricatum*, *Tortella bambergeri*.

Подавляющее большинство видов не показывает какой-либо связи с общей ориентацией скальных обнажений по странам света. По-видимому,

этого следовало ожидать, учитывая значительные размеры многих береговых утесов Березовой и Колвы: большинство из них предлагает множество разнообразно ориентированных, резко различающихся по освещенности и влажности поверхностей.

Тем не менее *Bryum argenteum*, *Leucodon sciuroides*, *Grimmia tergestina*, *Pseudoleskeella tectorum* были собраны только на обнажениях, ориентированных на ЮВ–Ю–ЮЗ, а *Tritomaria quinquedentata* – только на обнажениях, ориентированных на север. *Brachythecium tommasinii*, отмеченный в 21 полевом образце и отчетливо предпочитающий прохладные, тенистые местообитания, на скалах северных румбов не обнаружен.

Как видно из списка, некоторые нередкие виды отмечены только на отдельных участках долин. Так, частый и местами весьма многочисленный на верхних по течению Березовой скалах *Brachythecium tommasinii* не встречен ниже Варыша, а *Mnium thomsonii* – ниже Серовика. Обычный на Березовой мох *Tortella bambergeri* не найден ни на одной из скал по Колве. Все известные находки *Myurella sibirica* относятся к участку «Ежа»–Дивий, а находки *Cyrtomnium hymenophylloides* – к участку Ласткин–Серовик. *Entodon concinnus* и *Brachythecium cirrosum* не отмечались в верхней части долины Березовой, выше пункта «Квартал 175», тогда как ниже по течению они встречаются регулярно, причем нередко – в значительном обилии.

Наиболее своеобразный состав и облик сообществ мохообразных имеет, по-видимому, Камень Серовик. На тенистых северных стенах здесь довольно обильны уникальные для этого обнажения *Stenidium molluscum* и *Campylium protensum*. Причем второй вид практически полностью замещает здесь *Campyliadelphus chrysophyllus*, чрезвычайно обычный и многочисленный на всех других обследованных известняковых скалах, но на Серовике отмеченный лишь в одном образце с выходящей на берег реки стены.

Наибольшее число мохообразных обнаружено на Ветлане и Ласткином Камне: 71 и 69 видов, соответственно. Однако это одновременно и наиболее подробно исследованные обнажения: 29 и 30 полевых образцов соответственно.

Благодарности. Я глубоко признателен А.Е. Селиванову, К.А. Карасеву, С.А. Кузнецову, обеспечившим мне возможность проведения сборов; Е.А. Игнатовой, М.С. Игнатову, В.Э. Федосову за проверку части критических образцов; О.М. Афоной за помощь в уточнении литературных сведений.

Дополнение

Вместе со мхами на скалах собрано небольшое количество образцов печеночников, в которых идентифицировано 14 видов: *Arnellia fennica* (Gottsche) Lindb. (7 образцов на участке «Собачья»–Ветлан); *Barbilophozia barbata* (Schmidel ex Schreb.) Loeske (13 образцов, «Усай»–Ветлан); *Vlepharostoma trichophyllum* (L.) Dumort. (6 образцов, Ласткин–Ветлан); *Conocephalum conicum* (L.) Dumort. s. l. (1 образец, Ветлан); *Lophocolea minor* Nees (4 образца, «Собачья»–Ветлан); *Mesoptychia heterocolpos* (Thed. ex Hartm.)

L. Soederstr. et Váňa (18 образцов, «Собачья»–Ветлан); *Plagiochila asplenioides* (L.) Dumort. (1 образец, Ветлан); *Plagiochila porelloides* (Torrey ex Nees) Lindenb. (9 образцов, «Квартал 174» – Ветлан); *Porella platyphylla* (L.) Pfeiff. (4 образца, «Усай»–Ветлан); *Preissia quadrata* (Scop.) Nees (4 образца, «Собачья»–Серовик); *Radula complanata* (L.) Dumort. (6 образцов, «Усай»–Ветлан); *Scapania gymnostomophila* Kaal. (18 образцов, «Собачья»–Ветлан); *Trilophozia quinquedentata* (Huds.) Bakalin (5 образцов, Рассыпной–Ветлан); *Tritomaria scitula* (Taylor) Joerg. (3 образца, Ветлан).

Список литературы

1. Безгоднов А.Г., Игнатова Е.А., Игнатов М.С. Новые находки мхов в Пермской области. 1. // *Arctoa*. – 2006. – Т. 15. – С. 253–254.
2. Безгоднов А.Г., Максимова А.Ю. Новые находки мхов в Пермском крае. 7. // In: Sofronova E.V. (ed.) *New Bryophyte Records*. 5. // *Arctoa*. – 2015. – Vol. 24. № 2. – С. 589–590.
3. Железнова Г.В. Новые находки мхов в Республике Коми. 1. // *Arctoa*. – 2006. – Vol. 15. – С. 251–252.
4. Максимов А.И. Листостебельные мхи в Красной книге Республики Карелия // *Труды Карельского научного центра РАН*. – 2009. – № 1. – С. 29–37.
5. *Особо охраняемые природные территории Пермской области: реестр* / отв. ред. С.А. Овеснов. – Пермь: Книжный мир, 2002. – 464 с.
6. Сюзев П.В. Состав бриологической флоры Пермского края // *Бюлл. Моск. об-ва испыт. прир.* – 1898. – Т. 12, вып. 2–3. – С. 264–301.
7. Goldberg I.L. The saxicolous moss flora of the Middle Urals // *Arctoa*. – 2002. – Vol. 11. – P. 63–80.
8. Fedosov V.E., Ignatova E.A. On *Orthotrichum pellucidum* and *O. hallii* (Orthotrichaceae, Bryophyta) in Russia. // *Arctoa*. – 2011. – Vol. 20. – С. 197–204.
9. Savicz L.I., Savicz V.P. *Bryotheca Rossica. Regionibus confinibus completa*. Edidit Hortus Bonanicus Principalis U.S.S.R. Decas II. // *Известия Главного ботанического сада СССР*. – 1927. – Vol. 26, В. 2. – С. 184–187.



УДК 581.555.3

Капитонова Ольга Анатольевна

Кандидат биологических наук, доцент, заведующий лабораторией экологии растений и животных в зоне рискованного земледелия

Селиванов Алексей Евгеньевич

Кандидат биологических наук, старший научный сотрудник отдела экологических исследований, заведующий кафедрой ботаники ПГГПУ

Капитонов Владимир Иванович

Научный сотрудник отдела экологических исследований

*ФГБУН «Тобольская комплексная научная станция УрО РАН»,
Россия, 626152, Тюменская область, г. Тобольск, ул. Академика Юрия
Осипова, 15, (3456) 22-09-33*

*ФГБОУ ВПО «Пермский государственный гуманитарно-педагогический
университет», 614990, Пермь, Сибирская, 24, (342) 23863455*

**СОСУДИСТЫЕ РАСТЕНИЯ НА ПЕСЧАНЫХ ОБНАЖЕНИЯХ
В ЗАПАДНОСИБИРСКОЙ АРКТИКЕ И СУБАРКТИКЕ*****Olga A. Kapitonova**

Candidate of biological sciences, associate professor, Head of the Laboratory of plant and animal ecology in the zone of risky agriculture, e-mail: kapoa.tkns@gmail.com

Alexey E. Selivanov

Candidate of biological sciences, Senior Researcher of the Department of Ecological Studies, e-mail: selivanperm@yandex.ru

Vladimir I. Kapitonov

Researcher of the Department of Ecological Studies, e-mail: kvi@udsu.ru

Tobolsk Complex Scientific Station of the Ural Branch RAS

Associate Professor of Botany

*Federal State Budget Educational Institution of Higher Professional Education
«Perm State Humanitarian Pedagogical University» 24, Sibirskaja, 614000, Perm,
Russia, e-mail: selivanperm@yandex.ru*

**VASCULAR PLANTS ON SANDY OUTCROPS IN WEST SIBERIAN
ARCTIC AND SUBARCTIC***

Аннотация: обследованы песчаные обнажения, образовавшиеся в результате антропогенной деятельности в районах западносибирской Арктики и Субарктики. Приводится список сосудистых растений, участвующих в процессах зарастания эродированных песчаных почв.

© Капитонова О.А., Селиванов А.Е., Капитонов В.И., 2016

* Работа выполнена в рамках конкурсного проекта УрО РАН «Аридизация (опустынивание, псаммофитизация, запесочивание) тундры и лесотундры в Западной Сибири: масштабы, причины, сущность, пути решения» (№ ГР 116020510089).

Ключевые слова: запесочивание, песчаные почвы, песчаные обнажения, эродированные почвы, Западно-Сибирская равнина, Субарктика.

Abstract: we examined sandy outcrops, formed as a result of human activities in areas of the West Siberian Arctic and Subarctic. The list of vascular plants involved in the processes of overgrowing eroded sandy soil is given.

Key words: sandy outcrop, sandy soil, eroded soil, the West Siberian Plain, Subarctic

Разнообразная антропогенная деятельность, осуществляемая в западносибирской Арктике и Субарктике, приводит к эрозии легких песчаных почв, что становится причиной запесочивания – явления, в последнее время все более увеличивающего свои масштабы [1]. Обнажение значительных массивов песков представляет реальную и потенциальную опасность для природных экосистем региона. Так, под толщей движущегося песка могут быть полностью погребены коренные растительные сообщества тундры и лесотундры. На вновь образовавшихся песчаных поверхностях, являющихся следствиями дефляционного выдувания, раздувов, эоловых наносов и гидрогенных выносов [2], начинается процесс вторичной сукцессии, характер которой определяется положением песчаных обнажений в рельефе местности и режимом увлажнения.

Летом 2016 г. нами проведены обследования антропогенных песчаных обнажений на территории Белоярского, Сургутского, Пуровского и Надымского административных районов Ханты-Мансийского (ХМАО) и Ямало-Ненецкого (ЯНАО) автономных округов с целью изучения процессов их зарастания. Были изучены выработанные песчаные карьеры, в том числе с признаками проведенных рекультивационных мероприятий, участки незакрепленных песков, движущихся по направлению господствующих ветров, а также выносы песков водными массами, стекающими вдоль склонов. В пределах песчаных обнажений регистрировали все встреченные виды сосудистых растений, отмечали их обилие по шкале Браун–Бланке на учетных площадях в 400 м². Всего обследовано восемь песчаных обнажений в следующих пунктах:

1. ХМАО, Белоярский р-н, в 31 км к юго-западу от пос. Лыхма (N63°00' E66°32'). 24.07.2016.

2. ЯНАО, Пуровский р-н, в 27 км к югу от г. Муравленко (N63°32' E 74°58'). 27.07.2016.

3. ЯНАО, Пуровский р-н, в 32 км к юго-западу от пос. Губкинский (N64°17' E 75°50'). 28.07.2016.

4. ЯНАО, Пуровский р-н, в 24 км к юго-юго-западу от пос. Коротчаево (N65°41' E 78°01'). 29.07.2016.

5. ЯНАО, Пуровский р-н, в 23 км к юго-востоку-востоку от г. Новый Уренгой (N 66°00' E 77°17'). 29.07.2016.

6. ЯНАО, Надымский р-н, в 8 км к юго-западу от пос. Пангоды (N 65°47' E 74°19'). 30.07.2016.



7. ЯНАО, Пуровский р-н, в 30 км к юго-западу от пос. Губкинский, (N64°17' E 75°56'). 31.07.2016.

8. ХМАО, Сургутский р-н, в 50 км к юго-запад-запад от г. Ноябрьск (N 63°01' E 74°25'). 01.08.2016.

В результате проведенных исследований выявлено произрастание на обследованных запесоченных участках 46 видов сосудистых растений из 31 рода и 15 семейств. Ниже приводится список обнаруженных видов растений с указанием места их произрастания (цифры в скобках соответствуют приведенным выше обследованным пунктам). Гербарные образцы хранятся в гербарии Тобольской комплексной научной станции УрО РАН.

Семейство *Equisetaceae*

1. *Equisetum arvense* L. (4).
2. *E. sylvaticum* L. (1).

Семейство *Pinaceae*

3. *Pinus sibirica* Du Tour, проростки (4, 5).
4. *Pinus sylvestris* L., проростки (2, 3, 7, 8).

Семейство *Betulaceae*

5. *Betula exilis* Sukaczew (8).
6. *B. pendula* Roth (5).

Семейство *Salicaceae*

7. *Salix gmelinii* Pall. (3, 4, 5, 6).
8. *S. lapponum* L. (8).
9. *S. triandra* L. (5, 6).
10. *S. viminalis* L. (4, 5).

Семейство *Ericaceae*

11. *Arctous alpina* (L.) Niedenzu (5, 6).
12. *Chamaedaphne calyculata* (L.) Moench (2).
13. *Ledum palustre* L. (2, 5).
14. *Oxycoccus palustris* Pers. (8).
15. *Vaccinium myrtillus* L. (2).
16. *Vaccinium vitis-idea* L. (2, 5, 6).
17. *Vaccinium uliginosum* L. (2, 5, 8).

Семейство *Empetraceae*

18. *Empetrum nigrum* L. (2, 3, 5, 7, 8).

Семейство *Droseraceae*

19. *Drosera anglica* Huds. (2, 8).
20. *D. rotundifolia* L. (8).

Семейство Rosaceae

21. *Sorbus aucuparia* L., проростки (4).

Семейство Fabaceae

22. *Vicia cracca* L. (5).

23. *Trifolium montanum* L. (5).

Семейство Onagraceae

24. *Chamaenerion angustifolium* (L.) Scop. (1, 4, 5).

25. *Epilobium alpinum* L. (8).

Семейство Asteraceae

26. *Achillea millefolium* L. (4).

27. *Hieracium pseudoarctophilum* Schljakov (3, 4, 5, 6, 7).

28. *H. subarctophilum* Schljakov (2).

29. *Matricaria perforata* Mérat (1, 4, 5).

30. *Tussilago farfara* L. (1).

Семейство Orchidaceae

31. *Dactylorhiza fuchsii* (Druce) Soó (2, 8).

Семейство Juncaceae

32. *Juncus articulatus* L. (5, 6).

33. *Juncus filiformis* L. (6).

34. *Juncus trifidus* L. (2, 3, 7).

Семейство Cyperaceae

35. *Carex acuta* L. (6).

36. *Carex rotundata* Wahlenb. (2).

37. *Eriophorum vaginatum* L. (2, 5, 8).

38. *Eriophorum angustifolium* Honck. (5).

Семейство Poaceae

39. *Agrostis clavata* Trin. (1, 4, 5).

40. *Alopecurus aequalis* Sobol. (6).

41. *Bromopsis inermis* (Leyss.) Holub (4, 5).

42. *Calamagrostis canescens* (Web.) Roth (5).

43. *C. epigeios* (L.) Roth (2, 6, 7).

44. *Lolium perenne* L. (1).

45. *Phleum alpinum* L. (1, 5).

46. *Festuca polesica* Zapal. (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).



Список литературы

1. *Ильминских Н.Г.* Аридизация (опустынивание, псаммофитизация, запесочивание) Арктики и Субарктики: масштабы, причины, сущность явления // Экология и природопользование в Югре: материалы Всерос. науч.-практ. конф., посвящ. 15-летию каф. экологии СурГУ. – Сургут, 2014. – С. 24–25.
2. *Кулюгина Е.Е.* Флора и растительность песчаных обнажений припечорских тундр: автореф. дис. ... канд. биол. наук. – Сыктывкар, 2004. – 27 с.

УДК 581.95

Кузьмин Игорь Владимирович

Научный сотрудник международной комплексной научно-исследовательской лаборатории по изучению изменения климата, землепользования и биоразнообразия

*ФГАОУ ВО «Тюменский государственный университет»,
Россия, 625003, г. Тюмень, ул. Володарского, 6, (912) 922-56-77*

Капитонов Владимир Иванович

Научный сотрудник отдела экологических исследований

*ФГБУН «Тобольская комплексная научная станция УрО РАН», Россия 626152,
Тюменская область, г. Тобольск, ул. им. академика Юрия Осипова, 15,
(3456) 22-09-33*

**НАХОДКИ СИНАНТРОПНЫХ РАСТЕНИЙ В БЕЛОЯРСКОМ РАЙОНЕ
ХАНТЫ-МАНСИЙСКОГО АВТОНОМНОГО ОКРУГА – ЮГРЫ*****Igor V. Kuzmin**

Researcher of the International Complex Research Laboratory for Study of Climate Change, Land Use and Biodiversity, e-mail: ivkuzmintgu@yandex.ru

Tumen State University

Vladimir I. Kapitonov

Researcher of the Department of Ecological Studies, e-mail: kvi@udsu.ru

Tobolsk Complex Scientific Station of the Ural Branch RAS

**FINDS OF SYNANTROPIC PLANTS IN BELOYARSKY DISTRICT
OF KHANTY-MANSI AUTONOMOUS OKRUG – UGRA***

Аннотация: синантропизация растительного покрова Севера выражается в колонизации аборигенными видами синантропных местообитаний и в заносе на созданные человеком экотопы новых для региона рудеральных растений. При мониторинге одного из очагов синантропизации (новой автомобильной трассы Андра – Белоярский) в Белоярском районе ХМАО были обнаружены

© Кузьмин И.В., Капитонов В.И., 2016.

* Работа выполнена в рамках темы ФНИ «Выявление эпицентров синантропизации биоты в Западно-Сибирской Арктике и Субарктике» (№ гос. регистрации 116020510090).



новые для флоры района три вида-апофита и 10 адвентивных видов-антропофитов. Вторая находка в районе сделана для трех редких адвентивных видов.

Ключевые слова: флора, адвентивные виды, ХМАО, Арктика и Субарктика.

Abstract: The plant cover synantropization of North expressed in the colonization of the anthropogenic habitats on native species and skidding on the artificial ecotopes the new plant species for the region. When monitoring of one of the foci synanthropization (new highway Andhra – Beloyarskiy) in Beloyarsky district KhMAO we have found 3 apophyte species and 10 adventive species, which are new to the flora of the area. For 3 rare adventive species made the second find in the area.

Key words: flora, adventive species, Khanty-Mansi Autonomous Okrug, Arctic and Subarctic.

Ханты-Мансийский автономный округ – Югра (ХМАО), занимающий Приполярный Урал и обширные равнинные территории Северного Зауралья, относимые к районам Крайнего Севера, имеет сравнительно бедную и плохо изученную флору сосудистых растений, общий список которых из 1200 видов впервые составлен в 2006 г. [2]. Из девяти административных районов ХМАО самое скудное число хорологических данных приходится на Белоярский район, что связано с его труднодоступностью. Более или менее там изучены только окрестности озера Нумто [1].

Важное влияние на современный состав северной флоры оказывают процессы ее синантропизации, выражающиеся как в адаптации аборигенных видов к антропогенным условиям, так и в заносе новых, чуждых для региона адвентивных видов.

Особое значение для колонизации заносными растениями новых территорий в условиях ХМАО приобретают придорожные экотопы, являясь местами концентрации рудеральных растений, обитающих на песчаных насыпях и по краям щебнистых оснований асфальтированных дорог. Оттуда они в большем или меньшем обилии проникают и в сопредельные экотопы с растительным покровом, нарушенным в ходе того же строительства автомобильной дороги.

В 2016 г. мы изучили антропогенные биотопы в равнинной части ХМАО и обнаружили в них синантропные растения, не отмеченные ранее для некоторых административных районов в источниках [1; 2]. Материалы (гербарии, фото) хранятся на Тобольской комплексной научной станции УрО РАН.

Аборигенные виды в синантропных местообитаниях (гемерофилы, или апофиты):

Aconitum villosum Rchb. Белоярский район, 77 км южнее г. Белоярский, по трассе Андра □ Белоярский, у моста через р. Ун-Пажью; 63°0'29"N 66°31'39"E (63.008035, 66.527597); край просеки под трассу, вьётся по кустам; единично; вегетируют; И.В. Кузьмин, 24 VII 2016.

Batrachium kauffmanii (Clerc) Krecz. Белоярский район, 77 км южнее г. Белоярский, по трассе Андра – Белоярский, под мостом через р. Ун-ажью; 63°0'29"N 66°31'39"E (63.008035, 66.527597); мелководье; обильно; цветут; В.И. Капитонов, И.В. Кузьмин, 24 VII 2016.

Inula britannica L. Белоярский район, 77 км южнее г. Белоярский, по трассе Андра – Белоярский, у моста через р. Ун-Пажью; 63°0'29"N 66°31'39"E (63.008035, 66.527597); сырой песок на бывшей стоянке тяжелой техники вдоль трассы; единично; цветут; И.В. Кузьмин, 24 VII 2016.

Заносные виды в синантропных местообитаниях (антропофиты, в том числе адвентики).

В Белоярском районе нами был хорошо изучен участок трассы в 1 км длиной (по 500 м в обе стороны от моста через р. Ун-Пажью), где обнаружено много видов, ранее не указанных для Белоярского района и которые явно отсутствовали во флоре изученной местности до строительства дороги (открыта для движения транспорта в сентябре 2013 г.). Приводим список видов и единую этикетку.

Cichorium intybus L.; очень обильно; цветет.

Hordeum jubatum L.; 2 растения; плодоносят.

Lepidium ruderale L.; 2 растения; цветут и плодоносят.

Lotus ucrainicus Клоков; обильно; цветут и плодоносят.

Medicago falcata L. s. str.; единично; цветут.

Potentilla argentea L.; 2 растения; цветут.

Silene latifolia Poir. [*Melandrium album* (Mill.) Garcke]; единично; цветут.

Spergula arvensis L. [*S. sativa* Boenn. nom. illeg.]; 1 растение; цветет и плодоносит.

Spergularia rubra (L.) J. Presl & C. Presl; обильно, цветут и плодоносят (возможно, аборигенный вид).

Trifolium hybridum L.; обильно; цветут (возможно, вид для рекультивации).

Белоярский район, 77 км южнее г. Белоярский, по трассе Андра – Белоярский, у моста через р. Ун-Пажью; 63°0'29"N 66°31'39"E (63.008035, 66.527597); песчаная отсыпка трассы, рекультивированная злаково-луговоклеверной смесью; И. В. Кузьмин, 24 VII 2016.

В этом же локалитете обнаружены виды, ранее приводимые [1] только из единственного местонахождения в пределах Белоярского района:

Cerastium fontanum subsp. *vulgare* (Hartm.) Greuter & Burdet. [*C. holosteoides* subsp. *glandulosum* (Boenn.) I.V.Sokolova]; обильно; цветут (ранее для пос. Нумто).

Silene vulgaris (Moench) Garcke [*Oberna behen* (L.) Иконн.]; единично; цветут и плодоносят (ранее для базы у оз. Мувенглор в парке Нумто).

Stellaria graminea L.; единично; цветет (ранее для пос. Нумто).

На этом примере видна существенная роль антропогенных биотопов в синантропизации биоты Крайнего Севера.



Список литературы

1. Глазунов В. А. Флора природного парка «Нумто» (Белоярский район, Ханты-Мансийский автономный округ) // Вестник экологии, лесоведения и ландшафтоведения. – Тюмень: Ин-т проблем освоения Севера СО РАН, 2005. – Вып. 6. – С. 3–15.

2. Определитель растений Ханты-Мансийского автономного округа / Ред. И. М. Красноборов. – Новосибирск–Екатеринбург: Изд-во «Баско», 2006. – 304 с.

УДК 581.555.3

Селиванов Алексей Евгеньевич

Кандидат биологических наук, заведующий кафедрой ботаники

ФГБОУ ВО «Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет», Россия, 614990, г. Пермь, Сибирская, 24, (342) 23863455

старший научный сотрудник отдела экологических исследований

*ФГБУН «Тобольская комплексная научная станция УрО РАН»,
Россия, 626152, Тюменская область, г. Тобольск, ул. им. академика Юрия
Осипова, 15, (3456) 22-09-33*

ЛИШАЙНИКИ И МХИ В СУКЦЕССИЯХ НА ПЕСЧАНЫХ ОБНАЖЕНИЯХ В ЗАПАДНО-СИБИРСКОЙ РАВНИНЕ*

Alexey E. Selivanov

Alexey E. Selivanov Ph.D., Associate Professor of Botany
*Federal State Budget Educational Institution of Higher Education «Perm State
Humanitarian Pedagogical University» 24, Sibirskaja, 614000, Perm, Russia,
e-mail: selivanperm@yandex.ru*

Candidate of biological sciences, Senior Researcher of the Department of Ecological
Studies, e-mail: selivanperm@yandex.ru
Tobolsk Complex Scientific Station of the Ural Branch RAS

LICHENS AND MOSSES IN SUCCESSIONAL ON SANDY OUTCROPS IN THE WEST SIBERIAN PLAIN*

Аннотация: оценивается роль лишайников и мхов в восстановительных сукцессиях на антропогенных песчаных обнажениях в Западно-Сибирской низменности.

Ключевые слова: сукцессии, лишайники, мхи, песчаные обнажения, эродированные почвы, Западно-Сибирская равнина, Субарктика.

Abstract: the paper evaluated the role of lichens and mosses in recovery anthropogenic successions on sandy outcrops in the West Siberian Plain.

Key words: successions, lichens, mosses, sandy outcrop, the West Siberian Plain, Subarctic.

© Селиванов А.Е., 2016.

* Работа выполнена в рамках конкурсного проекта УрОРАН «Аридизация (опустынивание, псаммофитизация, запесочивание) тундры и лесотундры в Западной Сибири: масштабы, причины, сущность, пути решения» (№ ГР 116020510089).



При проведении полевых работ по изучению таксономического биоразнообразия сосудистых растений, лишайников и мохообразных в Белоярском, Сургутском, Пуровском, Надымском административных районах ХМАО и ЯНАО, при анализе картографических материалов и спутниковых снимков были обнаружены значительные по площади обнажения песков, отмечена трансформация фитоценозов, происходящая вследствие движения песка.

В 2016 г. на базе Тобольской комплексной научной станции были запланированы и проведены первые работы по обследованию этих обнажений.

Проведенные работы позволили дать предварительную оценку масштабов и причин запесочивания субарктических районов Западной Сибири, получить первые сведения о характере зарастания песчаных обнажений, показать основные направления сукцессионных процессов в ходе зарастания песчаных обнажений, в зависимости от особенностей рельефа [2].

Для изучения стадий восстановительных сукцессий использовали метод трансект. Трансекты проводили от центральных частей обнажения, лишенных растительного покрова, к ненарушенным фитоценозам за его краем. Вдоль трансект закладывали учетные площадки размером в 1 м². Число учетных площадок на трансектах варьировалось от 5 до 10, в зависимости от протяженности трансекты и характера смены фитоценозов вдоль них. Всего было заложено 13 трансект и 58 площадок. На площадках оценивали обилие всех представленных видов сосудистых растений, мхов и лишайников по шкале Браун-Бланке [1].

На песчаных обнажения отмечены два главных направления восстановительных сукцессий, идущих в разных условиях увлажнения, которые, в свою очередь, в значительной степени, определяются рельефом. [1].

В пониженных участках рельефа, или на местах с высоко расположенным гидроупором, сукцессия через ситниковую и пушицевую стадию идет, по-видимому, к сфагновому болоту. К настоящему времени нам удалось выявить только первые две стадии этой сукцессии, в которых лишайники и мохообразные участия не принимают.

В сухих местах, особенно на подвижных песках, сукцессия начинается с появления разреженных дерновин *Polytrichum juniperinum* Hedw. и *P. piliferum* Hedw., затем формируются сообщества *Calamagrostis epigeios* (L.) Roth. На следующем этапе появляются кустарнички – водяника (*Empetrum nigrum* L.), арктоус (*Arctous alpina* (L.) Nied.), голубика (*Vaccinium uliginosum* L.). Завершающей стадией этой сукцессии являются северо- или среднетаежные кустарничково-лишайниковые леса и редколесья.

Лишайники в этой сукцессии начинают заселять мало подходящий для них песчаный субстрат вместе с появлением кустарничков. Можно предположить, что именно на этом этапе, песок становится более стабильным, что и определяет возможность закрепления лишайниковых пропагул.

Среди всего спектра жизненных форм лишайников на песчаных обнажениях отмечены почти исключительно кустистые. Выявлен лишь один

накипной вид. Этот факт можно объяснить тем, что листоватые виды легко могут быть полностью погребены переносимым ветром песком, что приведет к их гибели, а накипное слоевище, не обладающее собственной механической прочностью, не может сформироваться на таком рыхлом и подвижном субстрате, как песок.

Число видов лишайников вдоль трансект возрастает в направлении к ненарушенным сообществам. Первым на песке поселяется особая распростертая форма *Cladonia arbuscula* (Wallr.) Flot. ssp. *mitis* (Sandst.) Ruoss. Затем к ней присоединяется *Flavocetraria nivalis* (L.) Kärnefelt et Thell. Оба эти вида не образуют сомкнутые заросли, а в виде отдельных кустиков растут на голом песке. На следующем этапе, растительный покров становится более сомкнутым, достигая общего проективного покрытия в 30–40 %. В таких сообществах распростертая форма *Cladonia arbuscula* сменяется на нормальные слоевища, появляются *Cladonia stellaris* (Opiz) Pouzar et Vězda, *Cladonia rangiferina* (L.) F.H. Wigg., *Cladonia stygia* (Fr.) Ruoss, *Cladonia amaurocraea* (Flörke) Schaer., а также кустистые представители сем. *Parmeliaceae*: *Alectoria ochroleuca* (Hoffm.) A. Massal., *Cetraria nigricans* Nyl., *Cetraria islandica* (L.) Ach., *Flavocetraria cucullata* (Bellardi) Kärnefelt et A. Thell.

Позже к сообществам лишайников присоединяются виды кладоний с развитым чешуевидным первичным слоевищем: *Cladonia gracilis* (L.) Willd., *Cladonia coccifera* (L.) Willd. s. l., *Cladonia cornuta* (L.) Hoffm., *Cladonia sulphurina* (Michx.) Fr., характерные для стабильных сообществ кустистые пармелиевые: *Gowardia nigricans* (Ach.) Halonen, Myllys, Velmala et Hyvärinen, *Bryocaulon divergens* (Ach.) Kärnefelt, Здесь же один раз был отмечен единственный накипной вид – *Baeomyces rufus* (Huds.) Rebert.

В качестве выводов можно отметить следующее:

- лишайники являются важным компонентом фитоценозов формирующихся в ходе восстановительной сукцессии на сухих участках песчаных обнажений, оказывая благоприятное механическое воздействие за счет уменьшения подвижности песка;

- видовое и экобиоморфное разнообразие лишайников в ходе сукцессии возрастает, что подчеркивает важную роль для них стабильного субстрата;

- несмотря на ослабленную конкуренцию со стороны сосудистых растений, общее число видов лишайников на песчаных обнажениях заметно меньше, чем в смежных климаксных таежных сообществах, что позволяет говорить о слабой выраженности у них эксплерентных свойств.

Список литературы

1. Александрова В.Д. Классификация растительности. Обзор принципов классификации и классификационных систем в разных геоботанических школах. – Л.: Наука, Ленинград. отд-ние, 1969. – 275 с.

2. Особенности зарастания песчаных обнажений на севере Западно-Сибирской равнины / А. Е. Селиванов, В. И. Капитонов, Н. В. Еремеева, О. А. Капитонова // Международный научно-исследовательский журнал. – 2016. – № 10 (52) – Ч. 4. – С. 41–45.

УДК 532.516; 532.526

Субботин Станислав Валерьевич

Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
лаборатории вибрационной гидромеханики

Козлов Виктор Геннадьевич

Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой
общей и экспериментальной физики

*ФГБОУ ВО «Пермский государственный гуманитарно-педагогический
университет», Россия, 614990, г. Пермь, ул. Сибирская, 24, (342) 238-64-15,
e-mail: subbotin_sv@pspu.ru, kozlov@pspu.ru*

Сабиров Рустам Рустямович

Кандидат физико-математических наук, кафедра прикладной физики

*ФГБОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический
университет», Россия, 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, (342) 219-80-67,
e-mail: sabirov@pspu.ru*

СТРУКТУРА ОСРЕДНЕННОГО ТЕЧЕНИЯ В СФЕРОИДАЛЬНОЙ ПОЛОСТИ, ВОЗБУЖДАЕМОГО УПРУГИМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ ГРАНИЦ*

Stanislav V. Subbotin

PhD, Senior Researcher of the Lab. Vibrational Hydromechanics

Victor G. Kozlov

DS, Head of the General and Experimental Physics Department

*Federal State Budget Educational Institution of Higher Education
«Perm State Humanitarian Pedagogical University»*

24 Sibirskaya, 614990, Perm, Russia, e-mail: subbotin_sv@pspu.ru, kozlov@pspu.ru

Rustam R. Sabirov

PhD, Department of Applied Physics

*Federal State Budget Educational Institution of Higher Education
«Perm National Research Polytechnic University»*

29 Komsomolsky prospekt, 614990, Perm, Russia, e-mail: sabirov@pspu.ru

STRUCTURE OF STEADY FLOW EXCITED IN SPHEROIDAL CAVITY BY ELASTIC DEFORMATIONS OF THE BOUNDARY*

© Субботин С.В., Козлов В.Г., Сабиров Р.Р., 2016

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 16-31-60099 мол_а_дк и Минобрнауки (грант 2014/372, проект 2176). Исполнители входят в состав Ведущей научной школы № НШ-9176.2016.1.

Аннотация: представлены результаты экспериментального исследования осредненного течения, возбуждаемого в периодически деформируемой полости сфероидальной формы. Значительное внимание уделено вопросам методики изготовления экспериментальной установки и проведения экспериментов. Обнаружено, что периодическая деформация стенки приводит к генерации осредненного течения в вязких пограничных слоях. Возникающее следом вторичное крупномасштабное течение в объеме жидкости имеет вид пары осесимметричных тороидальных вихрей. Интенсивность и структура осредненного течения исследуются в зависимости от частоты и амплитуды деформаций стенки. Для высокочастотного предела показано, что скорость течения во вторичных вихрях полностью определяется пульсационным числом Рейнольдса.

Ключевые слова: вибрации, деформируемая полость, вязкая жидкость, осредненное течение.

Abstract: the paper is devoted to the experimental study of steady flows appearing in the periodically deformable spheroidal cavity. A significant attention is paid to methods of production of the experimental technique and the experimental procedure. It is found that that the periodic deformation of the wall leads to the generation of averaged currents in the viscous boundary layers. A secondary large-scale current arising in the volume of the liquid is presented by a pair of axially symmetric toroidal vortexes. The intensity and structure of averaged flow is studied depending on the frequency and amplitude of the wall's deformation. For high-frequency limit it shows that the flow rate in the secondary vortices is completely determined by the pulsation Reynolds number.

Key words: oscillations, deformable container, viscous liquid, mass transfer, steady flow.

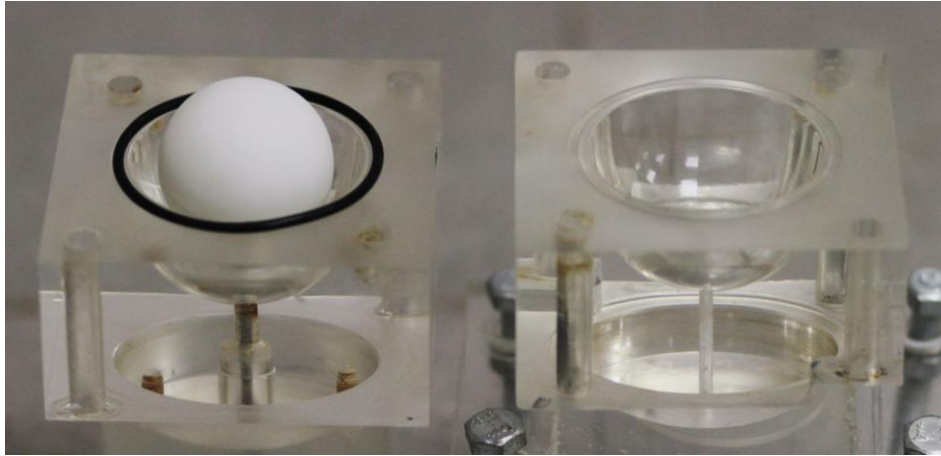
Изучение осредненных течений, возникающих в жидкости под действием переменных силовых полей различной природы, представляет значительный интерес как с точки зрения фундаментальной науки, так и в многочисленных прикладных аспектах. Существует множество примеров возникновения осредненного движения жидкости при вибрационном воздействии [1, 2]. Колебания жидкости в вязких пограничных слоях Стокса генерируют осредненную завихренность, которая приводит в движение жидкость в объеме [3].

Сфероидальная полость с твердой упруго деформируемой границей является моделью капли, поверхность которой вследствие адсорбции насыщена сурфактантом. В подобных случаях движущаяся капля небольшого размера ведет себя как твердое тело, ее граница устойчива к тангенциальным возмущениям, что приводит к снижению интенсивности массообмена между

поверхностью капли и ее объемом. Вещество может переноситься от внешних слоев капли во внутренние только за счет диффузии, что является подавляющим фактором, например, для скорости протекания химической реакции на границе раздела капли и окружающей среды [5]. Одним из способов создания движения жидкости в каплях является возбуждение колебаний ее поверхности, которое может быть осуществлено различными способами, такими как воздействие переменным электрическим полем и акустическими волнами, распространяющимися в жидкости [6]. Теоретическое описание процессов, протекающих в осциллирующей сферической капле жидкости, покрытой абсорбционным слоем, предложено в [7]. Целью настоящей работы является экспериментальное изучение структуры и интенсивности осредненного течения, возникающего в осциллирующей трехмерной модели капли. Анализ результатов проводится с позиций вибрационной механики.

Экспериментальная установка и методика. Для изготовления рабочей полости в форме упругой сферической оболочки используется прозрачная жидкая силиконовая резина Lasil T-4, которая затем полимеризуется в течение 24 часов при помощи добавления отвердителя. Готовая смесь из силикона и отвердителя обладает достаточно большой кинематической вязкостью около $\nu \sim 350$ Ст, при этом при перемешивании компонентов в смеси образуется большое количество воздушных пузырей. Для устранения нежелательных газовых включений первоначально уменьшается вязкость смеси, для этого в нее добавляется силиконовое масло ПМС-5 в соотношении 1/1. После тщательного перемешивания смесь помещается на несколько минут в вакуумную камеру, где осуществляется откачка воздуха.

Готовая смесь заливается в сферический зазор (рис. 1, а), образованный снаружи плексигласовой формой диаметром 52,0 мм, а внутри целлулоидной сферой (шарик для пинг-понга диаметром 40,0 мм). Система коаксиальных сфер центрирована с точностью до 0,2 мм. Внешняя полость из отполированного плексигласа собирается из двух полусфер и герметизируется резиновым кольцом, что позволяет впоследствии ее легко снять с отвердевшей силиконовой поверхности. Для удаления внутренней целлулоидной сферы используется этилацетат $C_4H_8O_2$, который заливается во внутреннюю сферу через техническое отверстие. Эфир полностью растворяет целлулоид, но не оказывает влияния на силикон. В результате после отверждения смеси и удаления внутренней сферы образуется прозрачная силиконовая сферическая поверхность с внешним и внутренним диаметром $D = 52,0$ и $d = 2r = 40,0$ соответственно (рис. 1, б). Силиконовая кювета обладает коэффициентом твердости по Шору 40А, прочностью на разрыв 6,7 МПа и упругим удлинением до 400 %.



a



б

Рис. 1. Форма для изготовления кюветы, снаружи образованная двумя плексигласовыми полусферами, а внутри – сферой из целлулоида (*a*), и фотография силиконовой кюветы в отсутствии деформации (*б*)

Кювета заполняется рабочей жидкостью (водоглицериновые растворы) через техническое отверстие, которое затем заливается жидким силиконом. Поскольку силикон не смешивается с рабочей жидкостью, а плотность силикона как в жидком, так и в твердом состоянии существенно ниже плотности рабочего раствора, полимеризация проходит непосредственно на поверхности рабочей жидкости. После полимеризации силикона в технологическом отверстии кювета представляет собой сферу с однородной эластичной стенкой, заполненной рабочей жидкостью без газовых включений (рис. 1, *б*).

Заполненная жидкостью кювета устанавливается на столик электродинамического вибростенда типа Veb GRW Teltow 3.19.39 (рис. 2), который может задавать гармонические колебания по закону $\sim b \sin \Omega t$ в вертикальной плоскости в широком диапазоне амплитуд и частот. Сверху кювета поджимается неподвижной в лабораторной системе отсчета горизонтальной прозрачной плексигласовой пластиной толщиной 10 мм, по краям которой закреплены металлические уголки. Верхний упор располагается так, что расстояние l между ним и подвижным столиком меньше диаметра сферы и составляет 32,0 мм. Таким образом, модель представляет собой сплюснутый сфероид, границы которого на полюсах плоские.

Поскольку кювета сплюснута достаточно сильно, ее форма при деформациях определяется не инерционными свойствами, а давлением внутри нее, которое передается одинаково со стороны столика вибростенда и верхней пластины.

Эксперимент проводится следующим образом. На вибрационную катушку вибростенда подается предварительно усиленный гармонический сигнал с генератора Zet-210 SigmaUSB. Вибрации осуществляются вдоль полюсов кюветы. Амплитуда вибраций измеряется одноосным акселерометром ПАМТ 4 0.225, сигнал с которого поступает на осциллограф LA-2M5PCI, интегрированный в компьютер. Спектральный анализ сигнала с акселерометра показывает, что величина паразитных гармоник не превышает 1% от величины основного сигнала. В экспериментах амплитуда и частота вибраций варьируются в диапазонах $f_{vib} = \Omega_{vib} / 2\pi = 7-25$ Гц и $b_{vib} = 0-7$ мм соответственно. Кинематическая вязкость жидкости в ходе эксперимента не меняется, ее значение составляет $\nu = 9,8$ сСт.

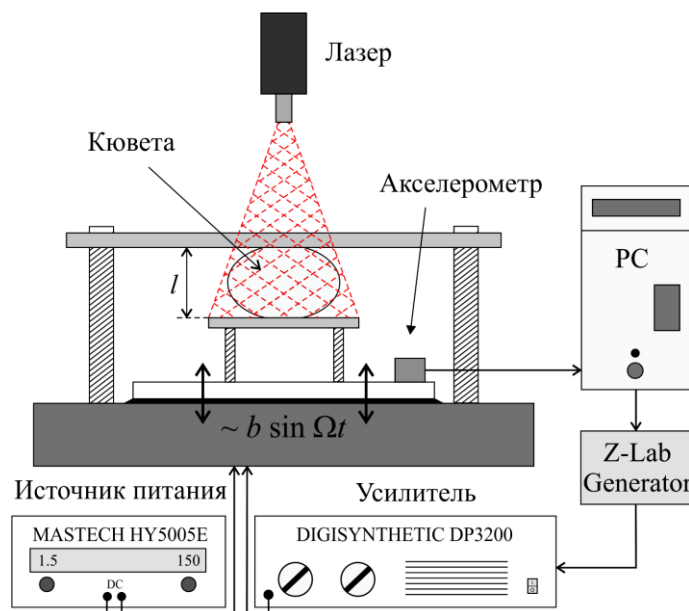


Рис. 2. Схема экспериментальной установки

Для визуального наблюдения за структурой течений в жидкость добавляются пластиковые светорассеивающие частицы размером $< 0,2$ мм и плотностью $\rho \sim 1,16$ г/см³, близкой к плотности жидкости. Поле скорости жидкости в плоскости, проходящей через ось симметрии, исследуется PIV-методом. Для этого полость освещается световым ножом толщиной 2 мм, который генерируется лазером непрерывного действия Z-Laser Z500Q. Видеорегистрация осуществляется на неподвижную в лабораторной системе отсчета скоростную камеру CamRecord CL600x2. Разрешение кадров составляет 800×800 пикселей, частота съемки подбирается равной или кратной частоте деформаций полости. Запись видео осуществляется на видеорегистратор DVR express core. С помощью программы PIVLab [8] обрабатываются пары кадров, промежуток времени между которыми кратен частоте деформаций. Скоростная видеорегистрация также используется для дополнительного контроля амплитуды колебаний столика вибростенда.

Результаты экспериментов. Периодическая деформация полости приводит к возникновению осредненного течения в вязких пограничных слоях толщиной $\delta = \sqrt{2\nu/\Omega}$, которое в свою очередь индуцирует вторичное течение в объеме жидкости. Структура осредненного течения сильно зависит от безразмерной частоты $\omega = \Omega r^2 / \nu$, характеризующей отношение размера полости к толщине пограничного слоя δ . В данной работе исследуется структура вторичного течения в области высоких частот, когда $\omega > 1000$.

Типичное осредненное поле завихренности, полученное PIV-методом представлено на рис. 3. Оно состоит из двух осесимметричных тороидальных вихрей, заполняющих практически всю полость. Вихревые образования ориентированы поперек направлению колебаний, при этом в осевом сечении потоки жидкости направлены от полюсов кюветы в центр. Отметим, что вблизи границы можно различить первичное вихревое течение, возникающее в вязком пограничном слое, толщина которого в проведенных экспериментах не превышает $\delta < 0,7$ мм. Однако из-за кривизны границы кюветы и разнице в показателях преломления воздуха, кюветы и рабочей жидкости, вблизи стенок возникают значительные оптические искажения, не позволяющие судить о величине скорости движения жидкости непосредственно в пограничных слоях. Для минимизации влияния оптических искажений на результаты измерений в качестве количественной характеристики интенсивности осредненного течения принимается горизонтальная скорость жидкости v в экваториальной плоскости. Горизонтальная компонента скорости измеряется поперек линии, соединяющей центры верхнего и нижнего вихрей.

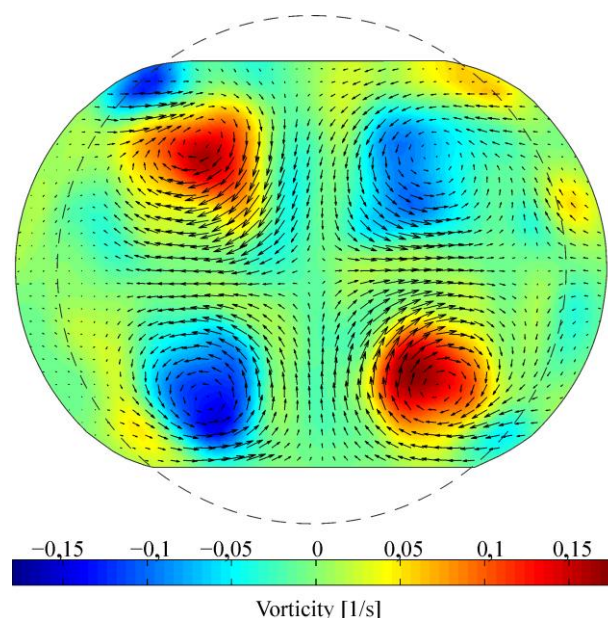


Рис. 3. Структура осредненного течения в осевом сечении колеблющейся полости при $b = 5,3$ мм и $f = 13$ Гц. Штриховой линией показана граница полости в отсутствии деформаций

Зависимость горизонтальной компоненты скорости v от амплитуды деформаций показана на рис. 4. Видно, что при фиксированной частоте вибраций с увеличением b скорость осредненного течения линейно возрастает. При этом увеличение частоты вибраций при фиксированном значении амплитуды также приводит к интенсификации течения. В исследуемом диапазоне безразмерных частот ω изменение частоты вибраций f и амплитуды b не приводит к качественному изменению структуры течения, которая остается подобна той, что приведена на рис. 3. Полученный результат качественно согласуется с результатами экспериментального исследования осредненного течения в цилиндрической полости с периодически деформируемой стенкой [4], а также с теоретическими исследованиями структуры течения в осциллирующей жидкой капле в высокочастотном пределе [7].

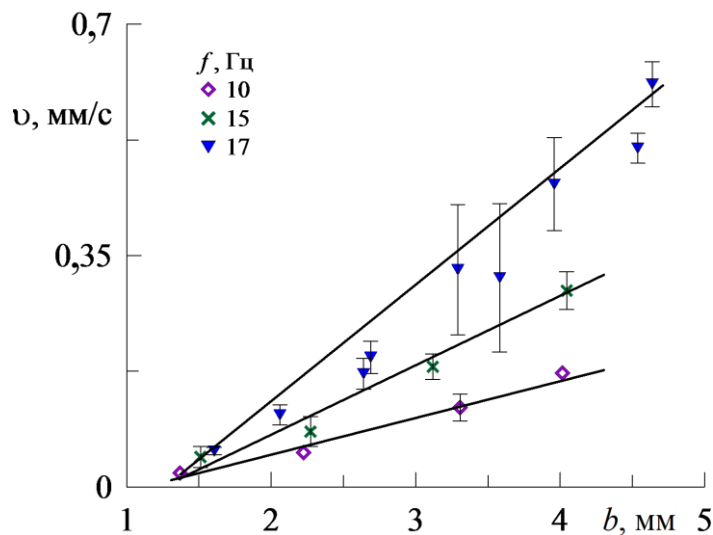


Рис. 4. Зависимость горизонтальной компоненты скорости жидкости во вторичных вихрях в экваториальной плоскости от амплитуды деформации при различных частотах вибраций

Как показано в работе [1], в случае высоких безразмерных частот ω и относительно малых амплитуд вибраций интенсивность осредненного течения определяется безразмерным пульсационным числом Рейнольдса - $Re_p = b^2 \Omega / \nu$. В качестве безразмерной характеристики скорости жидкости выберем величину $V = v r^2 / \nu$. На рис. 5 видно, что интенсивность осредненного течения V монотонно возрастает с увеличением Re_p . При этом результаты, полученные при различных параметрах деформаций полости, хорошо согласуются между собой. Этот результат подтверждает определяющую роль Re_p в области высоких безразмерных частот, что согласуется с ранее полученными результатами [1, 4].

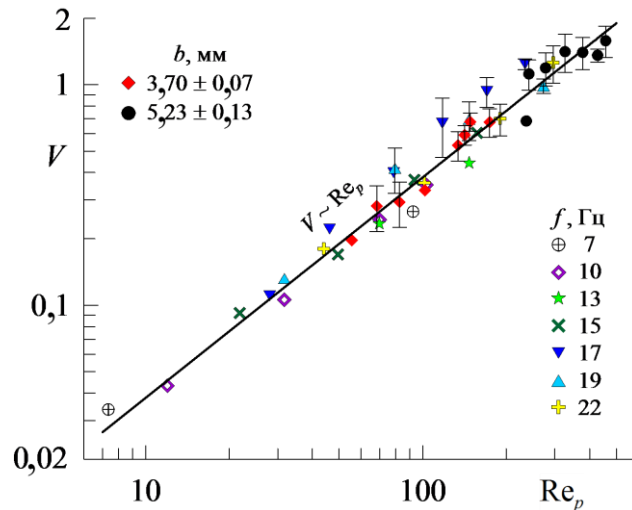


Рис. 5. Зависимость безразмерной скорости жидкости V от пульсационного числа Рейнольдса Re_p

Полученный закон $V \sim Re_p$ означает, что в высокочастотном пределе параметр $V / Re_p = \nu r / b^2 \Omega$ не должен меняться с безразмерной частотой ω . Зависимость $V / Re_p(\omega)$ представлена на рис. 6. Видно, что все экспериментальные точки укладываются на асимптотический закон $V / Re_p = 4 \cdot 10^{-3}$. Отметим, что величина этого параметра более чем на порядок меньше, чем в цилиндрической полости с деформируемой стенкой [8], где ее значение составляет $\sim 10^{-1}$. Это означает, что в сфере деформации полости возбуждают гораздо менее интенсивное осредненное течение, нежели в цилиндре.

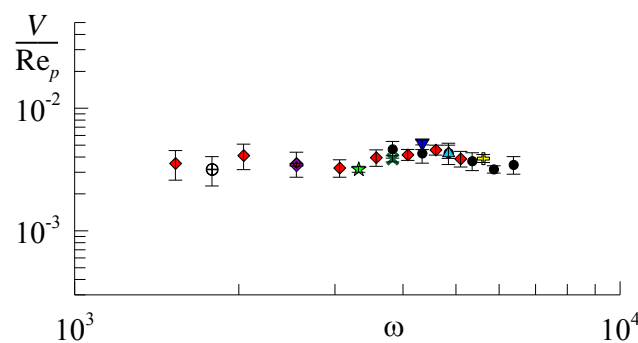


Рис. 6. Зависимость отношения V / Re_p от безразмерной частоты

Выводы. Экспериментально исследована структура осредненного течения в сфероидальной полости, упругая граница которой периодически деформируется. Обнаружено, что периодическая деформация полости приводит к возникновению осредненного течения в вязких пограничных слоях, которое, в свою очередь, индуцирует вторичное течение в объеме жидкости. Последнее состоит из двух осесимметричных тороидальных вихрей, ориентированных



поперек направления колебаний. Показано, что в случае высоких частот интенсивность осредненного течения не зависит от безразмерной частоты и может быть охарактеризована одним безразмерным комплексом – отношением безразмерной скорости жидкости к пульсационному числу Рейнольдса. Полученные результаты играют важную роль в понимании механизмов интенсификации массопереноса в замкнутых полостях.

Список литературы

1. *Иванова А.А., Козлов В.Г.* Вибрационная конвекция при непоступательных колебаниях полости (изотермический случай) // Изв. РАН. МЖГ. – 2003. – №2. – С. 25–32.
2. *Ниборг В.* Акустические течения // Физическая акустика / под ред. У. Мэзона. – М.: Мир, 1969. – Т. 2, ч. Б. – С. 302–377.
3. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974. – 712 с.
4. *Щипицын В.Д., Вяткин А.А., Козлов Н.В.* Экспериментальное исследование осредненных течений в осциллирующей капле // Тез. XIX Зимней школы по механике сплошных сред. ИМСС УрО РАН, г. Пермь, 24–27 февраля 2015 г. – Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2015. – С. 352.
5. *Liang T.-B. Slater M.J.* Liquid–liquid extraction drop formation: mass transfer and the influence of surfactant // Chemical Engineering Science. – 1990. – Vol. 45, Issue 1. – P. 97–105.
6. *Lighthill J.* Acoustic Streaming // J. Sound & Vib. – 1978. – Vol. 61, Issue 3. – P. 381–418.
7. *Murtsovkin V.A., Muller V.M.* Steady-State Flows Induced by Oscillations of a Drop with an Adsorption Layer // J. Colloid Interface Sci. – 1992. – Vol. 151, Issue 1. – P. 150–156.
8. *Thielicke W., Stamhuis E.J.* PIVlab – Time-Resolved Digital Particle Image Velocimetry Tool for MATLAB (version: 1.41) (2014). – URL: <http://pivlab.blogspot.ru/> (дата обращения: 06.12.2016).

УДК 532.5.01; 532.51; 532.526

Субботин Станислав Валерьевич

Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
лаборатории вибрационной гидромеханики

Кропачева Анастасия Сергеевна

Студентка физического факультета

*ФГБОУ ВО «Пермский государственный гуманитарно-педагогический
университет», Россия, 614990, г. Пермь, ул. Сибирская, 24, (342) 238-64-15,
e-mail: subbotin_sv@pspu.ru*

**ЗАВИСИМОСТЬ ДИНАМИКИ СВОБОДНОГО ЯДРА
ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПОЛОСТИ С ЖИДКОСТЬЮ ОТ ЧАСТОТЫ
МОДУЛЯЦИИ СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ***

Stanislav V. Subbotin

PhD, Senior Researcher of the Vibrational Hydromechanics Lab.

Anastasia S. Kropacheva

Student of the Physical Faculty

*Federal State Budget Educational Institution of Higher Education
«Perm State Humanitarian Pedagogical University»
24, Sibirskaya, 614990, Perm, Russia, e-mail: subbotin_sv@pspu.ru*

**DEPENDENCE OF THE DYNAMICS OF THE FREE CORE IN ROTATING
CAVITY ON THE MODULATION FREQUENCY OF THE ROTATION
RATE***

Аннотация: экспериментально исследуется поведение свободного ядра во вращающейся вокруг горизонтальной оси сферической полости, скорость вращения которой меняется по гармоническому закону (либрации). Обнаружено, что либрации приводят к возникновению осредненного течения, в результате которого свободное ядро приходит в дифференциальное вращение. Динамика ядра существенно зависит от частоты либрационного воздействия. Так, в случае либраций низкой частоты скорость дифференциального вращения непостоянна и периодически изменяется с частотой либраций. При этом интенсивность дифференциального вращения возрастает пропорционально

© Субботин С.В., Кропачева А.С., 2016

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 16-31-60099 мол_а_дк и РФФИ № 16-31-00169 мол_а.



квадрату амплитуды модуляции. При умеренных частотах ядро равномерно вращается относительно полости. Если частота либраций совпадает с частотой вращения полости, резонансное влияние либраций и поля силы тяжести приводят к уменьшению отстающего дифференциального вращения ядра.

Ключевые слова: либрации, пограничные слои, осредненное течение, дифференциальное вращение.

Abstract: the behavior of a free core in a rotating around the horizontal axis spherical cavity the rotation speed of which changes according to a harmonic law (libration) is experimentally investigated. It is found that the libration leads to the appearance of steady flow, resulting in the free core averaged lagging differential rotation. Core dynamics significantly depends on the frequency of the libration. So, in the case of low frequency libration the differential rotation speed is not constant and varies periodically with the libration frequency. Near the intensity the differential rotation increases as the square of the amplitude of modulation. At moderate frequencies the core rotates uniformly relative to the cavity. If the libration frequency coincides with the rotation frequency of the cavity, a resonant effect of the libration and the gravity field leads to decrease of the retrograde differential rotation of the core.

Key words: librations, boundary layers, steady flow, differential rotation.

Изучение динамики твердых включений во вращающихся жидких сферических слоях является актуальной задачей современной механики жидкости. Интерес объясняется внутренней структурой спутников и планет, многие из которых имеют твердое внутреннее и расплавленное внешнее ядро [12]. Известно, что гравитационное взаимодействие между планетами и их спутниками оказывает сильное влияние на динамику ядра [9]. Ярким примером являются так называемые «либрации» – периодические изменения скорости вращения планеты. Число работ в этом направлении велико. Так, аналитические [3] и экспериментальные [11] исследования движения жидкости в либрирующей сфере показали, что в пределе низких частот либраций в результате нелинейных эффектов в пограничных слоях Экмана генерируется осредненное азимутальное течение. Интенсивность течения не зависит от частоты и пропорциональна квадрату амплитуды либраций. В сферическом слое либрации внешней [4, 10] или внутренней сферы [5] также приводят к возникновению осредненного течения. Экспериментальные исследования влияния низкочастотных либраций на динамику свободного внутреннего ядра [2] показали, что либрации приводят к генерации отстающего дифференциального вращения, скорость которого зависит от вязкости жидкости. Это означает, что внутреннее ядро выступает в качестве индикатора, увлекающегося потоком жидкости, что может использоваться для исследования интенсивности осредненного течения. В настоящей работе продолжаются исследования, начатые в [8], при этом внимание уделяется влиянию частоты либраций на динамику твердого ядра.

Экспериментальная установка и методика. Схема экспериментальной установки приведена на рис. 1. Легкое сферическое тело (ядро) радиусом $R_1 = 1,27$ см и средней плотностью $\rho_s = 0,82$ г/см³ находится в заполненной жидкостью сферической полости радиусом $R_2 = 3,60$ см. Кювета представляет собой две полусферы, выточенные в плексигласовых параллелепипедах и плотно соединенные между собой. С обеих сторон кювета закрепляется в шарикоподшипниках неподвижных опор, при этом с одной стороны в качестве опоры используется подшипник большого диаметра. Это позволяет исследовать динамику угловой координаты ядра от параметров либраций.

В качестве рабочей жидкости используются водоглицериновые растворы кинематической вязкостью $\nu = 4 - 50$ сСт плотностью $\rho_l = 1,113 - 1,21$ г/см³. Полость быстро вращается вокруг горизонтальной оси, причем скорость вращения такова, что под действием центробежной силы твердое ядро находится вблизи оси вращения на одинаковом расстоянии от полюсов полости.

Вращение полости задается шаговым двигателем FL86STH80-4208A, управляемым драйвером SMD-9.0 и питающимся от источника постоянного тока Mastech NY5005E. Регулировка скорости вращения вала двигателя осуществляется с помощью генератора модуля Zet 210, управляемого компьютером. Для соединения вала двигателя с полостью используется муфта SJCA-30C, обеспечивающая точную передачу вращения.

Скорость вращения полости в инерциальной системе отсчета изменяется по следующему закону:

$$\Omega(t) = \Omega_{rot} (1 + \varepsilon \sin(\Omega_{lib} t)),$$

где Ω_{rot} – средняя скорость вращения полости, Ω_{lib} – угловая частота либраций, $\varepsilon \equiv \Delta\varphi \Omega_{lib} / \Omega_{rot} = \Delta\varphi \Omega$ – амплитуда модуляции, $\Delta\varphi$ – угловая амплитуда либраций.

Методика проведения экспериментов следующая. Первоначально кювета приводится в равномерное вращение со скоростью Ω_{rot} . После установления стационарного режима вращения ядра измеряется его скорость Ω_s в лабораторной системе отсчета. Скорость дифференциального вращения ядра рассчитывается как разность $\Delta\Omega = \Omega_s - \Omega_{rot}$. Далее исследуется зависимость скорости дифференциального вращения ядра от частоты $\Omega = \Omega_{lib} / \Omega_{rot}$ и амплитуды либраций ε . Частота и амплитуда либраций меняются в следующих диапазонах $\Omega = 0 - 2,5$, $\varepsilon = 0 - 1$.

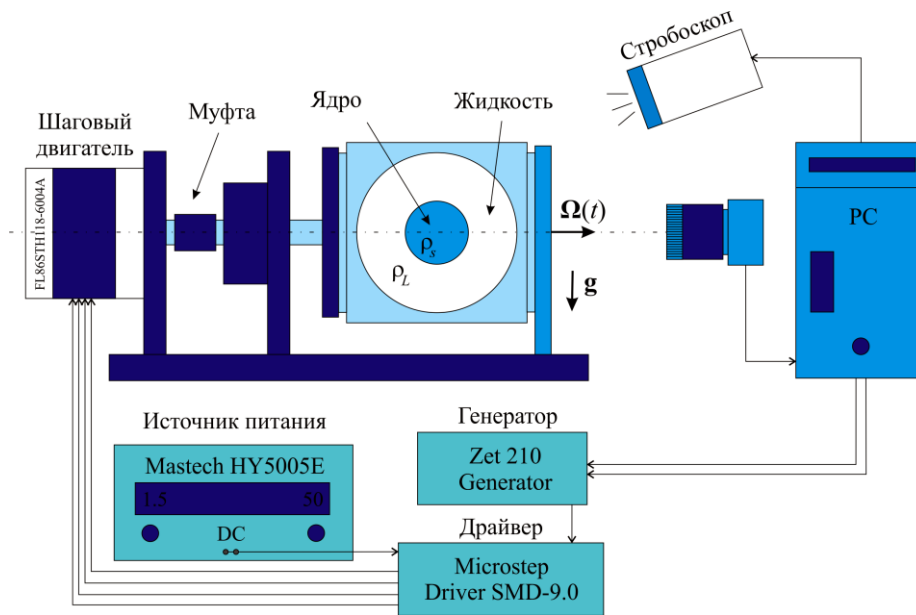


Рис. 1. Схема экспериментальной установки

Дополнительно динамика ядра исследуется с помощью системы скоростной видеосъемки. Видеорегистрация движения ядра вдоль оси вращения осуществляется на неподвижную в лабораторной системе отсчета скоростную камеру CamRecord CL600x2. Разрешение кадров составляет 800×800 пикселей, частота – до 1064 кадров в секунду. Запись осуществляется на видеорегистратор DVR express core. Информация о величине угла поворота ядра относительно полости извлекается с помощью программы ImageJ.

Вращательные колебания ядра. В отсутствие либраций ядро, плотность которого меньше плотности жидкости, в лабораторной системе отсчета под действием силы тяжести занимает стационарное положение на некотором расстоянии от оси вращения. При этом в системе отсчета полости ядро совершает поляризованные по кругу колебания относительно оси вращения, в результате чего приходит в равномерное отстающее дифференциальное вращение со скоростью $\Delta\Omega = (\Omega_s - \Omega_{rot}) < 0$ [1, 7]. Механизм дифференциального вращения связан с появлением осредненного момента сил в результате круговых колебаний ядра в системе отсчета полости [6, 7].

Либрации полости означают, что ее угловая координата изменяется со временем по закону:

$$\varphi(t) = \varphi + \delta\varphi = \varphi + \Delta\varphi \sin \Omega_{lib} t ,$$

где φ – угол, на который поворачивается полость в результате равномерного вращения со скоростью $\Omega_{rot} = d\varphi / dt$; а $\delta\varphi = \Delta\varphi \sin \Omega_{lib} t$ – периодическое изменение угловой координаты с частотой Ω_{lib} и амплитудой $\Delta\varphi$.

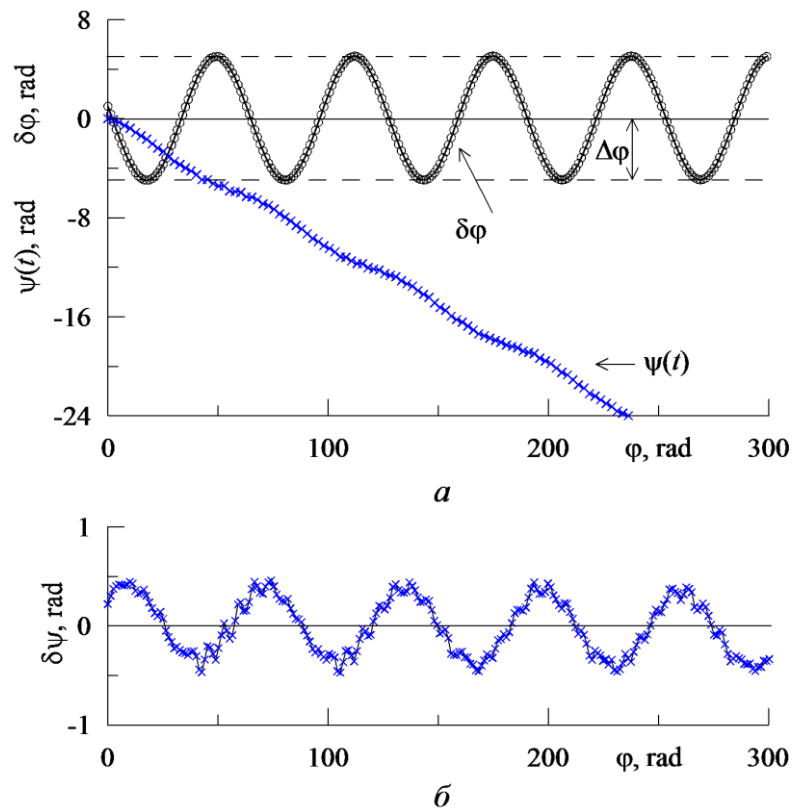


Рис. 2. Либрационная компонента угловой координаты полости $\delta\phi$ и угловой координаты ядра $\psi(t)$ в равномерно вращающейся системе отсчета со скоростью $\Omega_{rot} = 50,24 \text{ s}^{-1}$. Вязкость жидкости составляет $\nu = 6,2 \text{ сСт}$, частота либраций $\Omega_{rot} = 5,024 \text{ s}^{-1}$, амплитуда либраций $\Delta\phi = 5 \text{ рад}$

Прямые измерения величины угловой координаты полости, выполненные методом скоростной видеорегистрации, показывают, что в равномерно вращающейся системе отсчета полость совершает азимутальные колебания по гармоническому закону (либрации) с угловой амплитудой $\Delta\phi$ (рис. 2, а, кружки). Либрации полости низкой частоты ($\Omega \ll 1$) приводят к тому, что скорость дифференциального вращения ядра становится непостоянной и периодически изменяется (рис. 2, а, крестики). Ядро откликается на изменения $\delta\phi$ с той же частотой Ω_{lib} и существенно меньшей амплитудой $\Delta\psi$. Закон изменения угловой координаты ядра $\psi(t)$ можно записать следующим образом:

$$\psi(t) = \psi + \delta\psi = \psi + \Delta\psi \sin(\Omega_{lib}t + \alpha),$$

при этом ψ – угловая координата ядра, связанная с равномерным дифференциальным вращением относительно полости, а $\delta\psi = \Delta\psi \sin(\Omega_{lib}t + \alpha)$ – либрационная составляющая координаты, где α – разность фаз либраций ядра и полости. Рост отрицательных значений $\psi(t)$ означает, что в среднем ядро вращается в направлении, противоположном направлению вращению полости, т.е. совершает отстающее дифференциальное вращение. Таким образом, можно говорить о том, что либрации полости вызывают таковые свободного ядра.

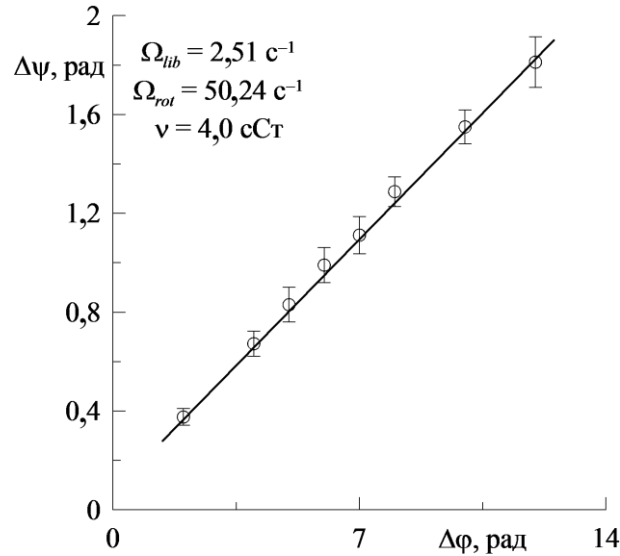


Рис. 3. Амплитуда либраций ядра $\Delta\psi$ в равномерно вращающейся системе отсчета со скоростью Ω_{rot} в зависимости от амплитуды либраций полости $\Delta\phi$ при $\nu = 6,2 \text{ cСт}$

Либрационная составляющая координаты ядра в зависимости от ϕ представлена на рис. 2, б. С увеличением $\Delta\phi$ амплитуда либраций ядра $\Delta\psi$ возрастает по линейному закону (рис. 3). Это означает, что безразмерная амплитуда либраций ядра $\Delta\psi / \Delta\phi$ не зависит от амплитуды либраций полости $\varepsilon \equiv \Delta\phi \Omega_{lib} / \Omega_{rot} = \Delta\phi \Omega$. Отметим, что эффект оказывается существенным только в области низких частот либраций, когда $\Omega \ll 1$, а обратное время спинапа сравнимо по величине с частотой $\sqrt{E} \sim \Omega \sim 10^{-2}$, где $E = \nu / (\Omega_{rot} R_2^2)$ – число Экмана. Сказанное означает, что вязкие пограничные слои, связанные с равномерным вращением, малы по сравнению с размером полости, но сравнимы с осциллирующими пограничными слоями, обусловленными либрациями. Таким образом, эффекты спинапа в области $\Omega \ll 1$ оказываются существенными, в результате чего ядро успевает «откликнуться» на изменение скорости вращения.

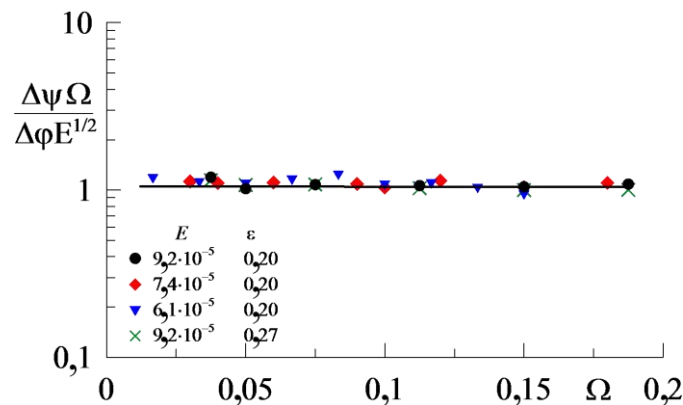


Рис. 4. Зависимость безразмерной амплитуды либраций ядра от безразмерной частоты либраций полости

Результаты экспериментов, полученных в опытах с жидкостями разной вязкости и при разных скоростях вращения полости, согласуются между собой на плоскости параметров $(\Delta\psi\Omega/\Delta\phi\sqrt{E}, \Omega)$ (рис. 4). Независимо от частоты Ω безразмерная амплитуда $\Delta\psi\Omega/(\Delta\phi\sqrt{E})$ имеет постоянное значение, равное ~ 1 . Это означает, что эффект либраций ядра не связан с его стационарным смещением в лабораторной системе отсчета под действием силы тяжести и имеет универсальный характер. Можно ожидать, что если ядро будет вращаться строго соосно с полостью, то оно будет точно так же откликаться на либрации полости в области, когда $\Omega \ll 1$.

Дифференциальное вращение. Как отмечалось ранее, в отсутствие либраций ядро совершает отстающее дифференциальное вращение под действием силы тяжести (горизонтальная штриховая линия на рис. 5). Либрации полости приводят к тому, что скорость вращения ядра становится непостоянной и периодически изменяется. При этом с увеличением амплитуды либраций ε средняя скорость отстающего дифференциального вращения ядра $\Delta\Omega$ возрастает (рис. 5). Независимо от повышения или понижения ε экспериментальные точки хорошо согласуются между собой и можно говорить об отсутствии гистерезиса в переходах между различными состояниями.

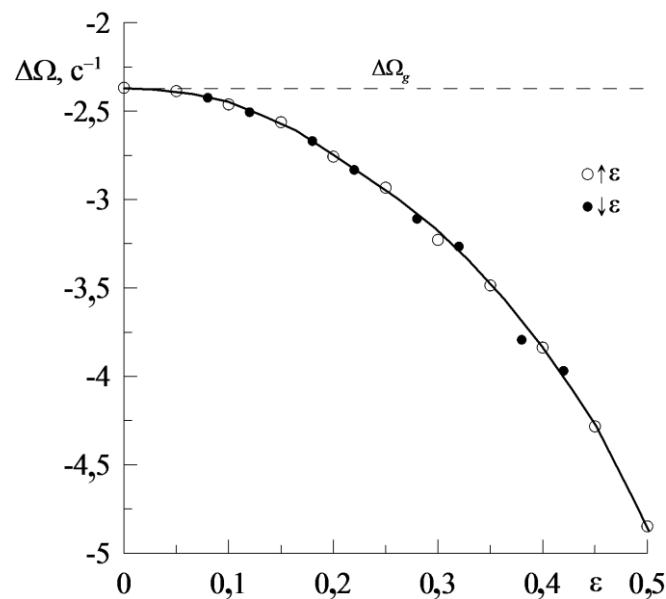


Рис. 5. Средняя скорость дифференциального вращения ядра в зависимости от амплитуды $\varepsilon = \Delta\phi\Omega$ при $\nu = 6,9$ сСт, $\Omega_{rot} = 50,24$ с⁻¹ и $\Omega = 0,15$. Светлые символы означают повышение ε , темные – понижение

На рис. 6, а показано влияние вязкости на дифференциальное вращение ядра. С увеличением ν скорость дифференциального вращения уменьшается, при этом вид зависимости $\Delta\Omega(\varepsilon)$ остается подобным.

Из [8] следует, что результирующее дифференциальное вращение определяется линейной суперпозицией дифференциальных вращений под действием нескольких силовых полей. В рассматриваемом случае система



«ядро–жидкость» находится в поле силы тяжести и в инерционном поле либраций. По аналогии разложим дифференциальное вращение на две компоненты, и далее будем говорить только о либрационной составляющей движения $\Delta\Omega_{lib} = \Delta\Omega - \Delta\Omega_g$. Здесь $\Delta\Omega_g$ – вклад поля силы тяжести в дифференциальное вращение.

Интенсивность дифференциального вращения, обусловленного либрациями $|\Delta\Omega_{lib}|/\Omega_{rot}$, в зависимости от амплитуды ε представлена на рис. 6, б. В случае малых вязкостей ($\nu = 4,7$ сСт) и низких частот либраций ($\Omega = 0,15$) дифференциальное вращение увеличивается с ε по закону, близкому к квадратичному – $|\Delta\Omega_{lib}|/\Omega_{rot} \sim \varepsilon^2$. Этот результат хорошо согласуется с рядом теоретических и экспериментальных работ, посвященных осредненному течению в либрирующей сферической полости [3, 4, 11]. Квадратичная зависимость следует из анализа нелинейного слагаемого для осциллирующего пограничного слоя Экмана в предположении, что инерционные волны отсутствуют, а частота либраций мала по сравнению со скоростью вращения полости ($\Omega \ll 1$), но велика по сравнению с обратным временем спинапа ($\sqrt{E} \ll \Omega$). Подобие законов для скорости осредненного течения и скорости дифференциального вращения ядра в зависимости от амплитуды либраций свидетельствует о том, что ядро откликается на либрационное воздействие и выступает в качестве индикатора интенсивности течения в сферическом слое. С увеличением вязкости жидкости наблюдается отклонение от квадратичной зависимости. Так, при $\nu = 46,6$ сСт скорость дифференциального вращения возрастает по закону $|\Delta\Omega_{lib}|/\Omega_{rot} \sim \varepsilon^{1.7}$. Можно предположить, что изменение показателя степени связано с увеличением величины обратного времени спинапа \sqrt{E} , значение которого при больших вязкостях становится больше Ω , где теория [3] не применима.

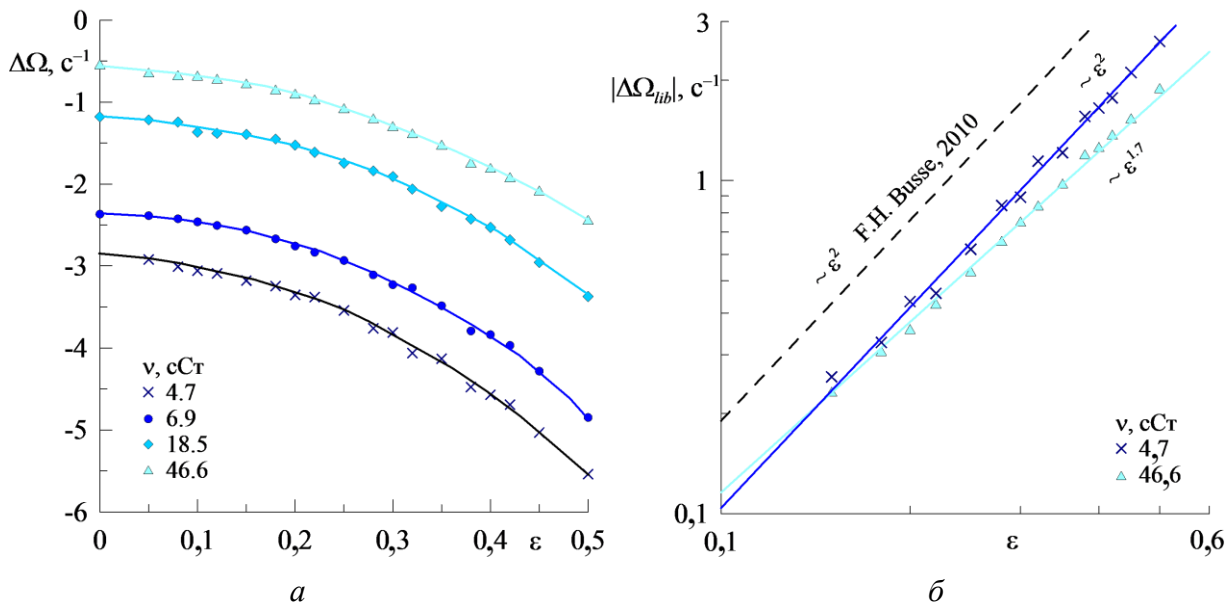


Рис. 6. Средняя скорость дифференциального вращения ядра (а) и либрационная составляющая скорости (б) в зависимости от амплитуды $\varepsilon = \Delta\varphi\Omega$ при различных вязкостях жидкости при $\Omega_{rot} = 50,24 \text{ c}^{-1}$ и $\Omega = 0,15$

Влияние частоты либраций Ω_{lib} на динамику ядра при фиксированном значении амплитуды ε показано на рис. 7. В области низких частот либраций ($\Omega_{lib} \ll \Omega_{rot}$) скорость дифференциального вращения $\Delta\Omega_{lib}$ практически не зависит от Ω_{lib} . В области умеренных Ω_{lib} , увеличение частоты приводит к плавному уменьшению $\Delta\Omega_{lib}$, которое принимает минимальное значение при равенстве частоты либраций и скорости вращения полости, $\Omega_{lib} = \Omega_{rot}$. В области $\Omega_{lib} > \Omega_{rot}$ скорость вращения ядра также не зависит от Ω_{lib} , однако ее абсолютное значение больше по величине, чем в области $\Omega_{lib} < \Omega_{rot}$. С увеличением скорости вращения полости кривые зависимости $\Delta\Omega_{lib}(\Omega_{lib})$ смещаются вправо, при этом скорость отстающего дифференциального вращения монотонно возрастает по абсолютной величине. Все кривые согласуются между собой на плоскости безразмерных параметров $(\Delta\Omega_{lib}/\Omega_{rot}, \Omega)$ (рис. 8). При этом положения максимумов для различных значений Ω_{rot} совпадают при частоте $\Omega = 1$.

Специфическое поведение ядра вблизи $\Omega = 1$ можно объяснить резонансным влиянием двух силовых полей: поля силы тяжести и инерционным полем либраций. С одной стороны, дифференциальное вращение связано с колебаниями ядра относительно полости [7]. С другой стороны, либрации полости генерируют осредненное отстающее движение жидкости в осциллирующих пограничных слоях на стенке полости [3]. При $\Omega = 1$ на каждый оборот полости приходится один период либраций, в результате чего среднее радиальное смещение ядра от оси вращения уменьшается. В [7] было показано, что интенсивность отстающего дифференциального вращения пропорциональна квадрату амплитуды смещения ядра:

$$|\Delta\Omega|/\Omega_{rot} \sim b^2/(R_1\delta),$$

где $\delta = \sqrt{2\nu/\Omega_{osc}R_1^2}$ – толщина динамического пограничного слоя. В свою очередь интенсивность отстающего осредненного течения, связанного с либрациями, пропорциональна ε^2 . А так как в области малых ε дифференциальное вращение, генерируемое либрациями, мало по сравнению с $\Delta\Omega_g$ (см. рис. 5), основной вклад в дифференциальное вращение вносит радиальное смещение ядра от оси вращения полости. Поскольку среднее смещение уменьшается по величине, соответственно уменьшается дифференциальное вращение ядра.

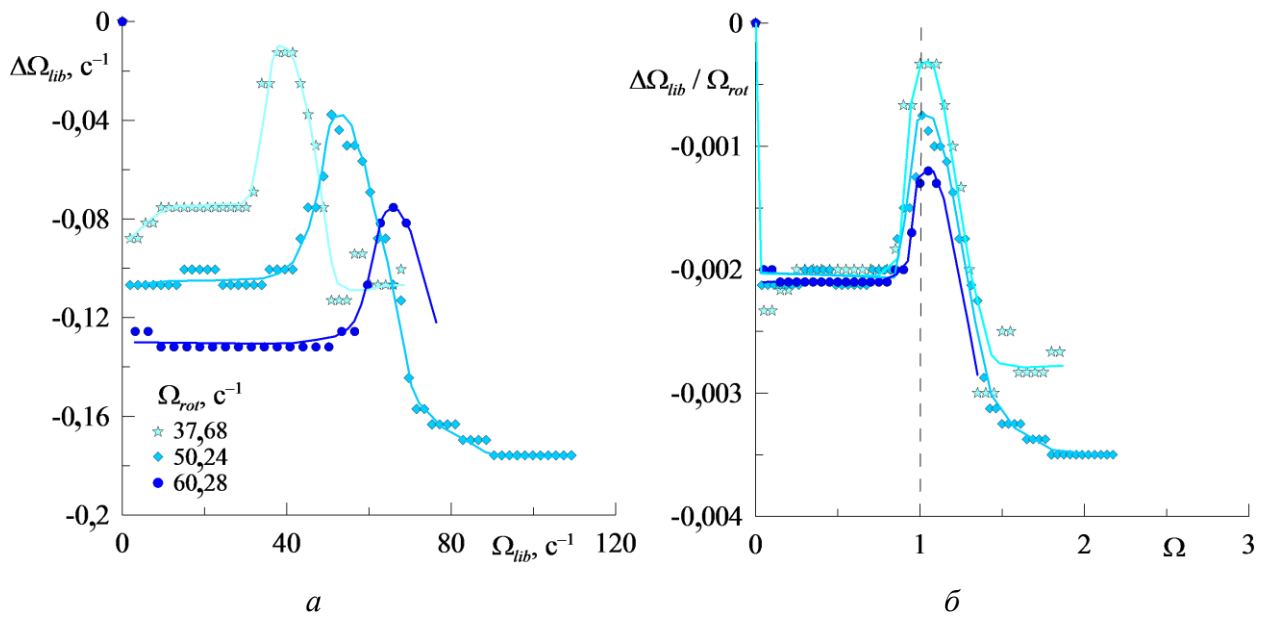


Рис. 7. Либрационная компонента скорости дифференциального вращения ядра в зависимости от частоты либраций Ω_{lib} (а) и либрационная компонента безразмерной скорости $\Delta\Omega_{lib} / \Omega_{rot}$ в зависимости от частоты $\Omega = \Omega_{lib} / \Omega_{rot}$ при $\nu = 4,7$ сСт и $\varepsilon = 0,10$

Выводы. Экспериментально исследована динамика свободного ядра в сферической полости, скорость вращения которой модулируется по гармоническому закону (либрации). Либрации полости генерирует осредненное движение жидкости в результате нелинейных эффектов в пограничных слоях Экмана. В результате свободное ядро приходит в дифференциальное вращение. Если частота либраций мала по сравнению с частотой вращения полости ($\Omega < 1$), то дифференциальное вращение ядра непостоянно и периодически меняется с частотой Ω . При этом амплитуда либраций ядра определяется отношением обратного времени спинапа \sqrt{E} к частоте либраций Ω . В свою очередь осредненная скорость дифференциального вращения ядра возрастает пропорционально квадрату амплитуды либраций ε^2 и не зависит от частоты Ω . Этот результат хорошо согласуется с теорией Буссе [3], построенной в приближении $\sqrt{E} \ll \Omega \ll \varepsilon \ll 1$, при отсутствии инерционных волн. Это означает, что свободное ядро выступает в качестве индикатора интенсивности и направления потоков. При совпадении частоты либраций со скоростью вращения полости ($\Omega = 1$) поле силы тяжести и инерционное поле, связанное с либрациями, резонансным образом действуют друг на друга. Вследствие этого ядро совершает колебания относительно полости, амплитуда которых меняется за период вращения. В результате интенсивность отстающего дифференциального вращения ядра уменьшается.

Список литературы

1. Козлов В.Г., Козлов Н.В., Субботин С.В. Движение жидкости и твердого ядра в сферической полости, вращающейся во внешнем силовом поле // Докл. РАН. – 2014. – Т. 454, № 2. – С. 173–177.
2. Субботин С.В., Уральцев А.В. Влияние либраций на динамику свободного ядра во вращающейся сферической полости с жидкостью // Конвективные течения... – 2015. – Вып. 7. – С. 211–225.
3. Busse F.H. Mean zonal flows generated by librations of a rotating spherical cavity // J. Fluid Mech. – 2010. – Vol. 650. – P. 505–512.
4. Calkins M.A., Noir J., Eldredge J.D., Aurnou J.M. Axisymmetric simulations of libration-driven fluid dynamics in a spherical shell geometry // Phys. Fluids. – 2010. – Vol. 22. – P. 086602.
5. Koch S., Harlander U., Egbers C., Hollerbach R. Inertial waves in a spherical shell induced by librations of the inner sphere: Experimental and numerical results // Fluid Dyn. Res. – 2013. – Vol. 45. – P. 035504.
6. Kozlov N. Theory of the vibrational hydrodynamic top // Acta Astr. – 2015. – Vol. 114. – P. 123–129.
7. Kozlov V.G., Kozlov N.V., Subbotin S.V. Steady flows excited by circular oscillations of free inner core in rotating spherical cavity // Eur. J. Mech. B-Fluid. – 2016. – Vol. 58 (4). – P. 85–94.
8. Kozlov V.G., Kozlov N.V., Subbotin S.V. The effect of oscillating force field on the dynamics of free inner core in a rotating fluid-filled spherical cavity // Phys. Fluids. – 2015. – Vol. 27, Issue 12. – P. 124101.
9. Le Bars M., Cébron D., Le Gal P. Flows Driven by Libration, Precession, and Tides // Annu. Rev. Fluid Mech. – 2015. – Vol. 47. – P. 163–193
10. Noir J., Hemmerlin F., Wicht J., Baca S.M., Aurnou J.M. An experimental and numerical study of librationaly driven flow in planetary cores and subsurface oceans // Phys. Earth Planet. Inter. – 2009. – Vol. 173. – P. 141–152.
11. Sauret A., Cébron D., Morize C., Le Bars M. Experimental and numerical study of mean zonal flows generated by librations of a rotating spherical cavity // J. Fluid Mech. – 2010. – Vol. 662. – P. 260–268.
12. Sohl F., Schubert G. Interior Structure, Composition, and Mineralogy of the Terrestrial Planets // Treatise on Geophysics. – 2007. – Vol. 10. – P. 27–68.



УДК 532.5

Щипицын Виталий ДмитриевичКандидат физико-математических наук,
доцент кафедры общей и экспериментальной физики*ФГБОУ ВО «Пермский государственный**гуманитарно-педагогический университет», Россия**614990, г. Пермь, ул. Сибирская, 24, (342) 238-64-33, e-mail: schipitsyn@pspu.ru***КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА В ПОЛОСТИ
С ЖИДКОСТЬЮ, СОВЕРШАЮЩЕЙ ПОСТУПАТЕЛЬНЫЕ
ВИБРАЦИИ*****Vitaliy D. Schipitsyn**

PhD, Associate Professor of the Chair of General and Experimental Physics

*Federal State Budget Educational Institution of Higher Education**«Perm State Humanitarian Pedagogical University»**24, Sibirskaya, 614990, Perm, Russia, (342) 238-64-33, e-mail: schipitsyn@pspu.ru***OSCILLATIONS OF A CYLINDRICAL BODY IN THE CAVITY WITH
LIQUID UNDER TRANSLATIONAL VIBRATIONS***

Аннотация: экспериментально исследовано поведение твердого цилиндра кругового сечения в прямоугольной полости, заполненной вязкой жидкостью и совершающей поступательные вибрации. Обнаружены различные режимы взаимодействия тела с границей кюветы. Осцилляционная динамика тел разной относительной плотности изучена посредством обработки видеозаписей, полученных с помощью скоростной видеокамеры.

Ключевые слова: подъемная сила, вязкая жидкость, твердое тело, осредненное движение, фазовые траектории, вибрационная механика

Abstract: the behavior of a solid cylinder of a circular cross section in a rectangular cavity filled with a viscous liquid and subjected to translational vibrations is experimentally investigated. The different modes of interaction between the body and the container's boundary were found. The oscillation dynamics of bodies with different relative density is studied by high-speed video-registration.

Key words: lift force, viscous liquid, solid body, mean motion, phase trajectories, vibrational mechanics.

Постановка задачи. На твердое тело, совершающее высокочастотные колебания в жидкости, действует осредненная подъемная сила. Эта сила возникает вследствие неоднородности осциллирующего поля скорости вокруг тела, то есть в результате неоднородного распределения осредненного давления на поверхности тела. Так, в [1] было обнаружено, что в случае интенсивных горизонтальных колебаний полости возможны устойчивые квазистационарные состояния, когда легкое по сравнению с жидкостью цилиндрическое тело отталкивается от верхней границы полости, а тела с большой относительной плотностью всплывают над дном. При дальнейшей интенсификации вибрационного воздействия обнаружено новое пороговое явление – возбуждение осредненного движения тела вдоль горизонтальной границы полости [2]. Последнее связано с потерей симметрии колебательного движения тела.

Предлагаемая работа является продолжением исследований, начатых в [1, 2]. Изучается взаимодействие твердого цилиндра кругового сечения с горизонтальной границей прямоугольной полости и его движение относительно кюветы. Особое внимание в работе уделено изучению вращательных колебаний тела, наблюдаемых почти во всех экспериментах одновременно с его поступательными колебаниями, а также эффекту возникновения осредненного вращения цилиндра при возбуждении его осредненного поступательного движения относительно полости. Поступательная и вращательная динамика цилиндра относительно кюветы изучается с помощью скоростной видеосъемки с последующей покадровой обработкой.

Схема эксперимента изображена на рис. 1. Кювета, изготовленная из оргстекла в форме прямоугольного параллелепипеда, жестко закрепляется на столике механического вибратора и совершает колебания в горизонтальной плоскости по гармоническому закону $X = b \cos \Omega t$ с частотой $f \equiv \Omega/2\pi = 0 - 25$ Гц и амплитудой вибраций $b = 0,1 - 5,5$ см. Детальное описание экспериментальной установки представлено в [2]. Внутри заполненной жидкостью кюветы помещен исследуемый цилиндр. Эксперименты выполнены с легким телом диаметром $d = 12,3$ мм, средней плотностью $\rho_s = 0,66$ г/см³ и тяжелым телом ($d = 20,1$ мм, $\rho_s = 1,20$ г/см³). Длина всех цилиндров одинакова и равна $l = 8,0$ см. На торцах тела имеются светоотражающие метки, позволяющие изучать его угловые колебания и измерять угловую координату φ . В экспериментах с легким телом в качестве рабочей жидкости используется водоглицериновый раствор (вязкость $\nu = 0,65$ Ст, плотность $\rho_L = 1,22$ г/см³); с тяжелым – растительное масло (вязкость $\nu = 0,67$ Ст, плотность $\rho_L = 0,92$ г/см³).

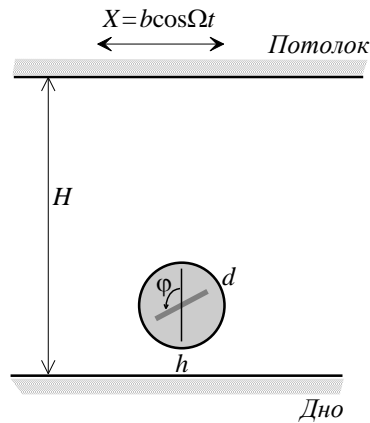


Рис. 1. К постановке эксперимента: H – высота кюветы; h – зазор между цилиндром диаметра d и дном полости при вибрациях (направление вибраций показано стрелками); φ – угловая координата колебаний тела относительно полости

Методика экспериментов соответствует [2]: при заданной амплитуде b плавно повышалась (понижалась) частота вибраций f . Опыты повторялись с телами различной относительной плотности ρ_s при различных значениях амплитуды b в жидкостях различной вязкости ν . Визуальные наблюдения за движением тела осуществлялись в свете стробоскопической лампы, синхронизированной с частотой вибраций. Взаимодействие цилиндра с границей полости и характер его колебаний относительно кюветы изучались с помощью видеосъемки высокоскоростной камерой при непрерывном освещении. Видеосъемка происходила с частотой 380 кадров в секунду при разрешении 800×300 точек на кадр. Данное разрешение позволяло измерить положение тела с точностью $0,04$ мм. Покадровая обработка видеоряда осуществлялась с помощью прикладных программ и позволяла измерить продольную координату тела x в системе отсчета полости, ширину зазора h и угол поворота тела φ одновременно с положением полости X в лабораторной системе отсчета.

Для описания продольных и угловых колебаний тела введем следующие характеристики. Продольная координата тела в системе отсчета полости изменяется со временем по гармоническому закону $x = Vt + \xi + const$, где V – скорость осредненного движения тела, ξ – осциллирующая составляющая (среднее за период значение ξ равно нулю). Угловая координата тела изменяется со временем по следующему закону: $\varphi = \Omega_r t + \Psi + const$, где Ω_r – скорость осредненного вращения цилиндра относительно полости, Ψ – осциллирующая составляющая угловых колебаний.

Результаты эксперимента

1. Легкое тело. Поведение легкого тела до возникновения осредненного движения. На рис. 2, а представлена зависимость угловой координаты тела Ψ

от безразмерной амплитуды поступательных колебаний тела после его отрыва, но до начала возникновения осредненного движения. Построенная кривая напоминает по своей форме эллипс, наклоненный относительно оси Ox . Стрелками на графике показано направление движения тела вдоль траектории. Зависимости угловых и продольных колебаний тела от времени показаны на рис. 2, б. Здесь и далее точки 1 на графике соответствуют продольным колебаниям тела ξ/b , точки 2 – угловым Ψ . Эксперименты выполнены с телом диаметром $d = 12,3$ мм и плотностью $\rho_S = 0,66$ г/см³ в водоглицериновом растворе вязкостью $\nu = 0,65$ Ст ($\rho_L = 1,22$ г/см³).

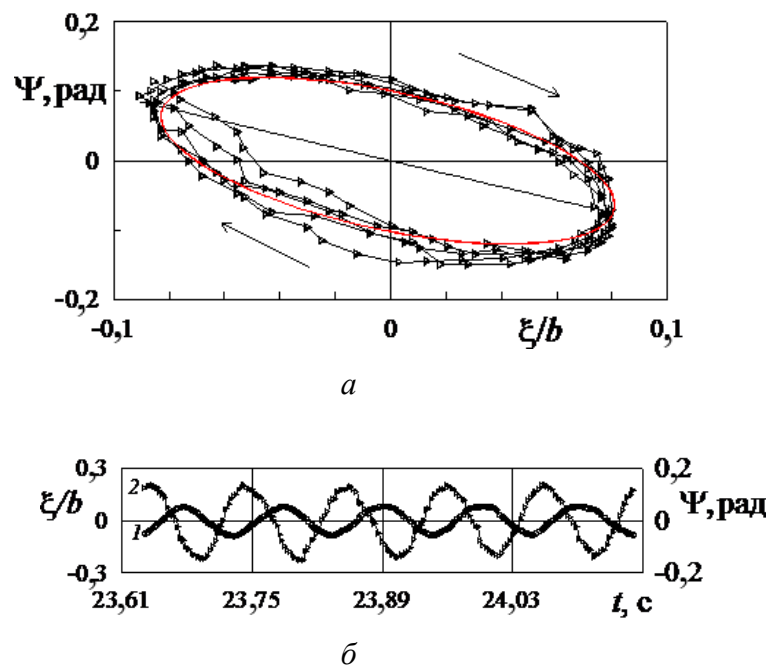


Рис. 2. Колебания легкого тела при вибрационном подвесе вблизи потолка полости; $f = 9,4$ Гц, $b = 2,76$ см

При перемещении тела слева направо линейная координата тела увеличивается (рис. 2, а), при этом его угловая координата уменьшается (цилиндр постепенно поворачивается по часовой стрелке). Это вращение противоположно направлению вращения в случае качения цилиндра вдоль границы со сцеплением. При движении тела в обратном направлении (справа налево) угловое перемещение начинает монотонно нарастать, что также противоположно направлению вращения в случае качения тела по границе без проскальзывания. Обнаружено, что угловые и продольные колебания тела происходят с некоторым сдвигом фаз γ (рис. 2, б).

Поведение легкого тела при осредненном движении. При большой надкритичности симметрия продольных колебаний цилиндра нарушается, что приводит к возникновению осредненного тангенциального перемещения тела вдоль горизонтальной границы полости. Траектория движения тела на плоскости $\xi/b, \Psi$ (рис. 3, а) в случае движения слева направо

трансформируется и представляет собой эллипс, параллельный оси Ox . Можно заметить, что координата угловых колебаний тела Ψ в течение периода слабо изменяется, то есть тело практически не вращается. В крайних точках своей траектории тело поворачивается на значительно больший угол, а линейная скорость обращается в ноль (тело не смещается вдоль горизонтальной стенки). Разность фаз между угловыми и продольными колебаниями цилиндра составляет $\gamma \approx 1,6$ рад (92°) (рис. 3, б; продольные колебания тела отстают от его угловых колебаний).

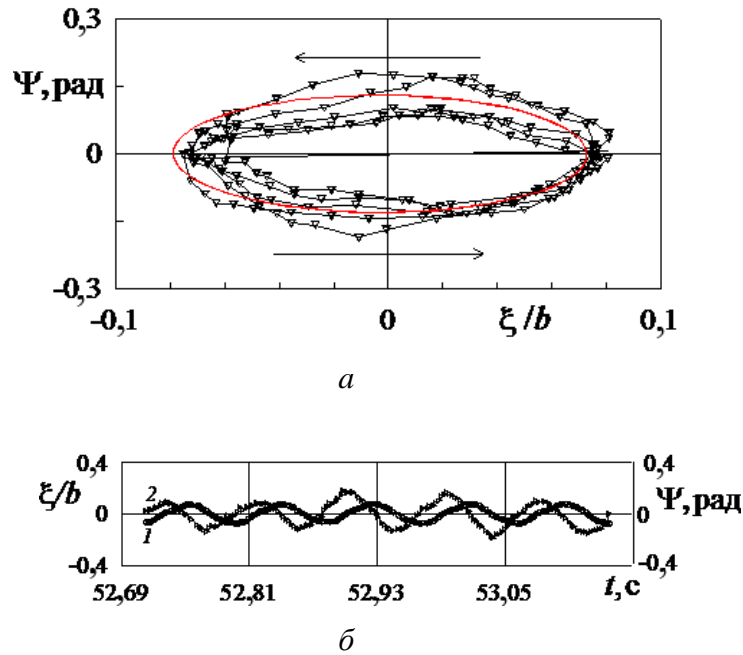


Рис. 3. Колебания легкого тела при осредненном перемещении тела слева направо;
 $f = 11,4$ Гц, $b = 2,84$ см; $V_{sr} = 2,65$ см/с, $\Omega_r = 6,8$ рад/с

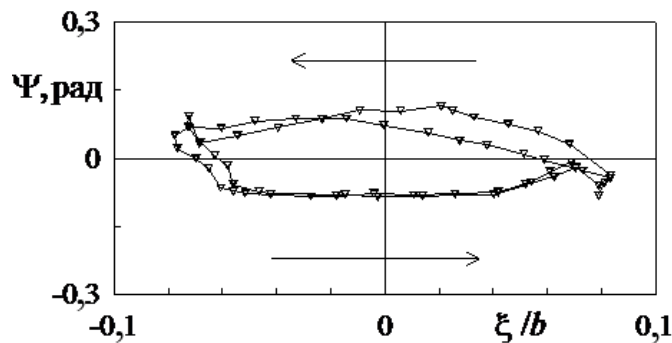


Рис. 4. Траектории колебаний тела при осредненном перемещении тела справа налево;
 $f = 11,4$ Гц, $b = 2,84$ см; $V_{sr} = -3,77$ см/с, $\Omega_r = -8,6$ рад/с

Траектория движения тела при его осредненном движении справа налево (рис. 4) имеет подобный вид. На каждом из графиков изображено несколько периодов колебаний тела. Характерные величины угловых и линейных колебаний тела в случае движения слева направо и справа налево оказываются

примерно одинаковыми. Разброс точек, соответствующих разным периодам колебаний тела, говорит о небольшом изменении величины угловой скорости тела в ходе колебаний.

Отметим, что в экспериментах скорость осредненного вращения тела Ω_r , оказывается больше, чем теоретическое значение скорости вращения $\Omega_{теор} = V/R$, рассчитанное для случая цилиндра, катящегося без проскальзывания по поверхности с линейной скоростью V : $\Omega_r/\Omega_{теор} = \Omega_r R/V = 2,8$ в случае движения слева направо, и $\Omega_r/\Omega_{теор} = 3,2$ – при движении справа налево. Осредненная скорость вращения оказывается непропорциональна таковой продольного перемещения. Значение скорости не совпадает со случаем качения со сцеплением.

Бесконтактное движение тела, аналогичное рассмотренному выше, описывается в [3, 4], где экспериментально исследовалось скатывание частицы (шарика) по наклонной плоскости под действием собственного веса при различных числах Рейнольдса. Обнаружено, что при скатывании между плоскостью и шариком может образоваться малый зазор. Причины бесконтактного движения не были выяснены, поскольку в рамках приближения Стокса подъемная сила, действующая на частицу, равна нулю. В отличие от результатов, представленных в настоящей работе, зазор в случае бесконтактного движения сферы очень мал и составляет всего несколько микрометров, что сравнимо с размерами шероховатости шариков.

Небольшое рассогласование в значениях угловой и линейной скорости при движении тела слева направо и обратно может быть объяснено слабой асимметрией траектории колебательного движения, которая проявляется даже в случае, когда тело еще не совершает осредненного тангенциального движения. В отдельных опытах наблюдалось относительно слабое осредненное вращение цилиндра ($\Omega_r \approx 0,1$ рад/с), при этом его средняя поступательная скорость отсутствовала. Угловая скорость Ω_r при осредненном движении (6,8 и 8,6 рад/с) в несколько раз превышает допороговое значение, что доказывает незначительный вклад асимметрии в динамику тела в надкритической области и, следовательно, в механизм возникновения тангенциальной силы.

2. Тяжелое тело. Остановимся подробнее на вибрационной динамике тяжелого тела. Эксперименты проводились с цилиндром диаметром $d = 20,1$ мм и плотностью $\rho_S = 1,20$ г/см³ в растительном масле вязкостью $\nu = 0,67$ Ст в той же постановке, что и с легким телом (см. п. 1). Отличие заключается только в том, что тяжелое тело в процессе колебаний взаимодействует не с потолком, а с дном кюветы. Ниже представлены траектории колебаний тела, полученные для характерных режимов взаимодействия тела с нижней границей кюветы: после отрыва, до возникновения осредненного движения и при осредненном движении тела.

Динамика тяжелого цилиндра до возникновения осредненного движения. Зависимость угловой Ψ и поступательной ξ/b координат колебаний тела в случае, когда оно уже оттолкнулось от дна полости, но осредненного движения еще не наблюдается, представлено на рис. 5, а. Фазовый портрет представляет собой деформированный наклонный эллипс. Связь продольной и угловой координат колебаний тела также не согласуется со случаем движения тела со сцеплением: при перемещении тела слева направо (координата ξ/b увеличивается) его угловая координата Ψ монотонно возрастает – тело не катится по дну полости, а вращается в сторону, противоположную смещению без проскальзывания.

Угловые и продольные колебания тяжелого цилиндра, как и в случае с легким телом, происходят с некоторым сдвигом фаз (рис. 5, б); разность фаз составляет

$\gamma = 0,20$ рад (11.5°), продольные колебания тела опережают его угловые колебания.

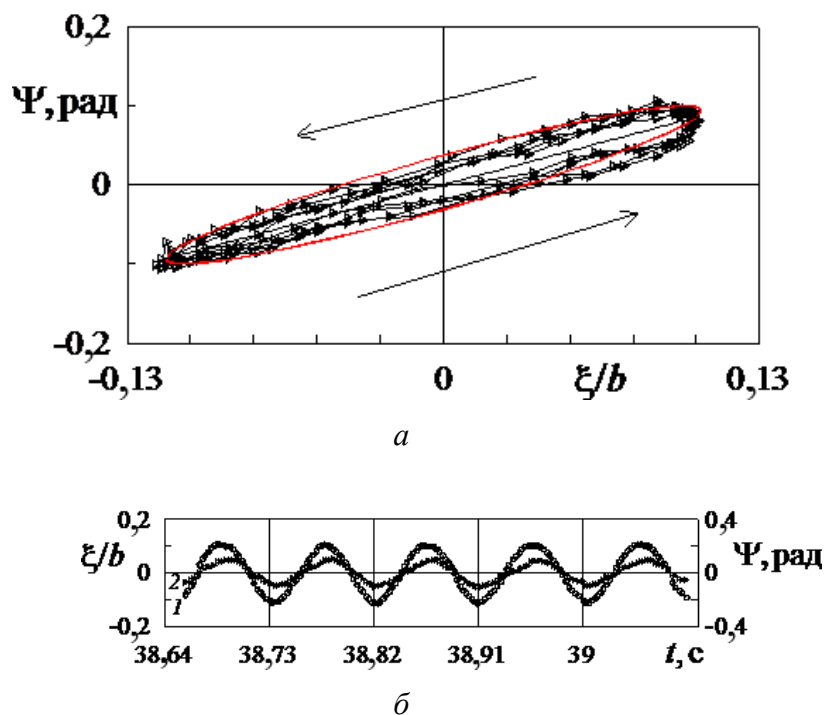


Рис. 5. Колебания тяжелого тела при вибрационном подвесе вблизи дна полости;
 $f = 11,2$ Гц, $b = 3,57$ см

Динамика тяжелого тела при осредненном движении. При осредненном движении тяжелого тела траектория его колебаний на плоскости $\xi/b, \Psi$ также представляет собой эллипс (рис. 6, а и рис. 7, а). Однако, в отличие от легкого тела, ориентация эллипса для тяжелого тела остается наклонной относительно оси Ox . Причем угол наклона остается неизменным независимо от направления его осредненного смещения (слева направо или справа налево).

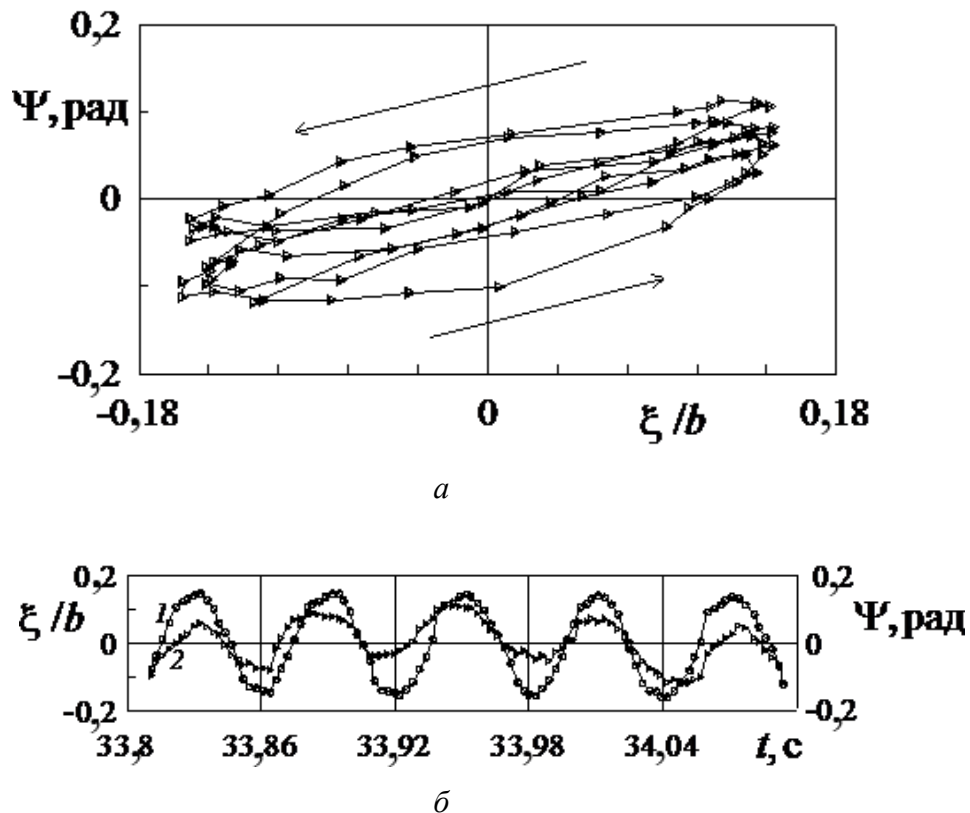


Рис. 6. Траектории колебаний тяжелого тела при осредненном перемещении тела справа налево; $f = 16,7$ Гц, $b = 3,91$ см; $V_{sr} = 2,09$ см/с, $\Omega_r = 6,5$ рад/с

Разброс в сериях точек, соответствующих различным периодам, обусловлен небольшим различием в величине средней угловой скорости вращения тела Ω_r . Значение разности фаз между угловыми и продольными колебаниями тела такое же, что и до возникновения осредненного движения, $\gamma = 0,20$ рад ($11,5^\circ$). Однако теперь продольные колебания тела отстают по фазе от его угловых колебаний (рис. 6, б и рис. 7, б).

При осредненном перемещении цилиндра вдоль дна полости слева направо и справа налево величины линейной и угловой скоростей отличаются. Особенно ярко это проявляется для значений осредненных угловых скоростей Ω_r (6,5 и 11,4 рад/с). Причина такого различия заключается в том, что кривые получены вблизи порога возбуждения осредненного движения ($f = 16,4$ Гц), когда даже малое изменение частоты вибрационного воздействия может играть значительную роль. Таким образом, движение слева направо ($f = 17,0$ Гц) изучено при надкритичности в два раза большей, чем движение справа налево ($f = 16,7$ Гц), поэтому и интенсивность оказывается выше.

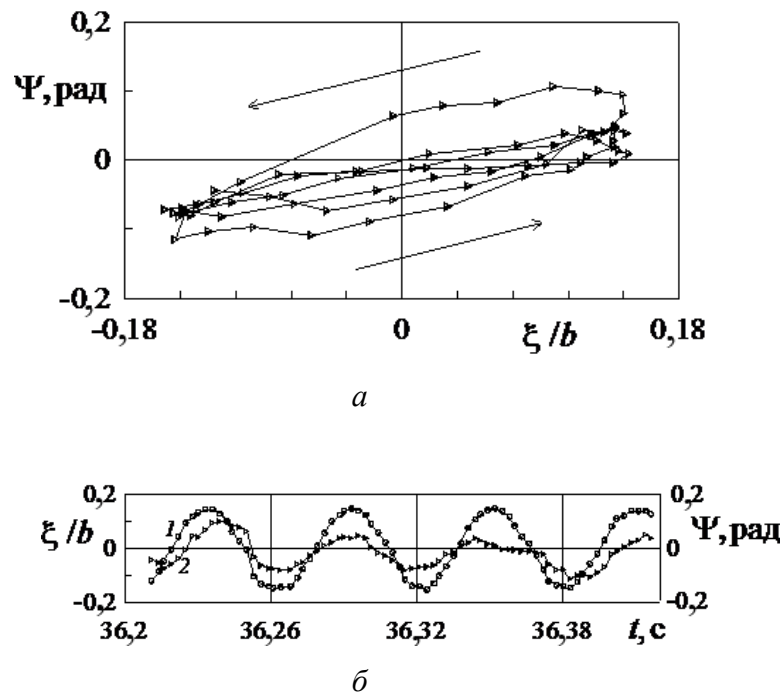


Рис. 7. Траектории колебаний тяжелого тела при осредненном перемещении тела слева направо; $f = 17,0$ Гц, $b = 3,94$ см; $V_{sr} = 3,23$ см/с, $\Omega_r = -11,4$ рад/с

Выводы. Экспериментально исследовано взаимодействие твердого цилиндрического тела с горизонтальной границей прямоугольной полости, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью. Колебательная и осредненная динамика тела изучена посредством обработки видеозаписей, полученных с помощью скоростной видеокамеры. Обнаружены различные режимы колебаний тела. Результаты позволяют предположить, что потеря симметрии колебательного движения тела может являться причиной генерации тангенциальной силы и возникновения его осредненного движения. В работе [1] показано, что величина подъемной силы, действующей на цилиндр и приводящей к подвесу в поле силы тяжести, остается одного порядка независимо от того, в каком направлении происходит вращение тела при тангенциальном смещении (вращение по ходу смещения или против него). Таким образом, можно предположить, что вращательные колебания тела не играют определяющей роли в механизме генерации вибрационной подъемной силы отталкивания.

Список литературы

1. Иванова А.А., Козлов В.Г., Щипицын В.Д. Подъемная сила, действующая на цилиндрическое тело в жидкости вблизи границы полости, совершающей поступательные колебания // ПМТФ. – 2014. – №5. – С. 55–64.
2. Иванова А.А., Козлов В.Г., Щипицын В.Д. Легкий цилиндр в полости с жидкостью при горизонтальных вибрациях // Изв. РАН. МЖГ. – 2010. – №6. – С. 63–73.

3. Прокунин А.Н., Уильямс М.К. О седиментации сферической частицы вдоль наклонной плоскости при больших числах Рейнольдса // Изв. РАН. МЖГ. – 1996. – №4. – С. 105–112.

4. Прокунин А.Н. О седиментации сферической частицы вдоль наклонной плоскости в вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса // Изв. РАН.МЖГ. – 1998. – № 4. – С.129–136.

УДК 517.55

Краснощеков Алексей Лаврентьевич

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики

ФГБОУ ВО «Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет», Россия, 614990, г. Пермь, ул. Сибирская, 24, e-mail: matfak.pspu@yandex.ru

ОДНОМЕРНЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ГОЛОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Alexey L. Krasnoshchekov

PhD, Associate Professor of Mathematics Department

*Federal State Budget Educational University of Higher Education «Perm State Humanitarian Pedagogical University» 24, Sibirskaja, Perm, 614990, Russia
e-mail: matfak.pspu@yandex.ru*

ONE-DIMENSIONAL GENERALIZED INTEGRAL FORMULAS OF HOLOMORPHIC FUNCTION WITH VARIABLE LIMITS OF INTEGRATION

Аннотация: для голоморфной функции комплексного переменного получены одномерные обобщенные интегральные формулы Коши и Карлемана с переменными пределами интегрирования.

Ключевые слова: функция, голоморфность, ряд, формула.

Abstract: for holomorphic functions of a complex argument one-dimensional generalized Cauchy and Carleman integral formulas with variable limits of integration were found.

Key words: function, holomorphic, series, formula.

Восстановление или разложение функции в окрестности некоторой точки в степенной ряд по степеням другой функции относится к задачам локального обращения. В одномерном комплексном анализе такая задача возникает при разложении голоморфной функции $f(z)$ в степенной ряд по степеням другой голоморфной функции $g(z)$,

$$f(z) = d_0 + d_1 g(z) + \dots + d_n g^n(z) + \dots$$

Такие степенные ряды называются *рядами Бурмана–Лагранжа* [6].

Коэффициенты степенного ряда Бурмана–Лагранжа находятся по формулам

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)g'(\zeta)}{g^{n+1}(\zeta)} d\zeta, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

$$d_n = \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow a} \left(f'(z) \frac{(z-a)^n}{g^n(z)} \right)^{(n-1)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где точка $\zeta = a$ – полюс порядка $n+1$, единственная особая точка, лежащая внутри замкнутого контура C области D . При определенных условиях, налагаемых на голоморфные функции $f(z)$ и $g(z)$, область D с замкнутым контуром C , ограничивающим ее, имеет место интегральная формула Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)g'(\zeta)}{g(\zeta) - g(z)} d\zeta. \quad (3)$$

Полагая $g(z) = z$, из формулы (3) получаем известную интегральную формулу Коши, а из ряда Бурмана–Лагранжа получается ряд Тейлора разложения голоморфной функции $f(z)$ с соответствующими коэффициентами. В качестве области D можно рассматривать единичный круг с центром в начале координат, круг любого радиуса со смещенным центром, звездные, выпуклые области. В работах автора [2–5] приводятся разложения различных функций в степенные ряды Бурмана–Лагранжа, а также одномерные обобщенные интегральные формулы Коши и Карлемана для этих функций.

Пусть D – звездная область пространства одного комплексного переменного относительно начала координат, ограниченная замкнутой кусочно-гладкой кривой C .

ТЕОРЕМА 1. Если функция $f(z)$ голоморфна в звездной области D , то для всех точек $z \in D$ имеет место интегральная формула

$$f(\alpha, \beta, z) = \int_{\alpha}^{\beta} \varepsilon^{\gamma-1} L_{\gamma} [f(\varepsilon z)] d\varepsilon, \quad (4)$$

где $f(\alpha, \beta, z) = \beta^{\gamma} f(\beta z) - \alpha^{\gamma} f(\alpha z)$, γ, α, β – любые действительные числа с условием: $\gamma \geq 1, 0 \leq \alpha < \beta \leq 1$, а $L_{\gamma} [f(z)] = \gamma f(z) + z f'(z)$ – дифференциальный оператор вида [1].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть точка z – произвольная точка области D . В силу того, что область D – звездная относительно начала координат, то точки (εz) при $\varepsilon \in [\alpha; \beta]$ также принадлежат звездной области D . Так как $(\varepsilon^{\gamma} f(\varepsilon z))'_{\varepsilon} = \gamma \varepsilon^{\gamma-1} f(\varepsilon z) + \varepsilon^{\gamma} z (f(\varepsilon z))'_{\varepsilon} = \varepsilon^{\gamma-1} (\gamma f(\varepsilon z) + z (f(\varepsilon z))'_z) = \varepsilon^{\gamma-1} L_{\gamma} [f(\varepsilon z)]$, то

$$\text{имеем } \int_{\alpha}^{\beta} \varepsilon^{\gamma-1} L_{\gamma} [f(\varepsilon z)] d\varepsilon = \int_{\alpha}^{\beta} (\varepsilon^{\gamma} f(\varepsilon z))'_{\varepsilon} d\varepsilon = (\varepsilon^{\gamma} f(\varepsilon z)) \Big|_{\alpha}^{\beta} = \beta^{\gamma} f(\beta z) - \alpha^{\gamma} f(\alpha z).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Интегральная формула (4) относится к одномерной обобщенной интегральной формуле Коши с переменными пределами интегрирования по переменной ε , причем, если $\varepsilon \in [\alpha; \beta]$ при $\alpha = 0$ и $0 < \beta \leq 1$ или при $\alpha = 0$ и $\beta = 1$, она совпадает с формулами, приведенными ранее в работах автора [2–5].

ТЕОРЕМА 2. Для голоморфных функций $f(z)$ и $g(z)$ в звездной области D и функции $f(z)$ с ее непрерывной производной в замкнутой области \bar{D} во всех точках $z \in D$ имеет место интегральная формула

$$f(\alpha, \beta, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \varepsilon^{\gamma-1} d\varepsilon \int_C \frac{L_{\gamma}[f(\zeta)]g'(\zeta)}{g(\zeta) - g(\varepsilon z)} d\zeta. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть точка $z \in D$. Тогда точки $(\varepsilon z) \in D$ при любых $\varepsilon \in [\alpha; \beta]$ и для функции $f(\alpha, \beta, z)$ имеет место формула (4). Так как функция $L_{\gamma}[f(\varepsilon z)]$ голоморфна в звездной области D , то для нее применима интегральная формула Коши (3), имеем

$$L_{\gamma}[f(\varepsilon z)] = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{L_{\gamma}[f(\zeta)]g'(\zeta)}{g(\zeta) - g(\varepsilon z)} d\zeta, \quad (6)$$

где интегрирование совершается по границе C в положительном направлении. Подставляя формулу (6) в правую часть формулы (4), получим искомую интегральную формулу (5).

ЗАМЕЧАНИЕ. При $\alpha = 0$ и $0 < \beta \leq 1$ или при $\alpha = 0$ и $\beta = 1$ интегральная формула (6) совпадает с формулами, приведенными ранее в работах автора [2–5]. Полученная формула (6) относится к одномерной обобщенной интегральной формуле Коши с переменными пределами интегрирования по переменной ε .

Пусть функция $g(z) = ze^{-mz}$, где $m \geq 0$ – действительное число. Тогда $g(\zeta) = \zeta e^{-m\zeta}$, а $g'(\zeta) = (1 - m\zeta) e^{-m\zeta}$. Подставляя в формулу (5) для произвольной голоморфной функции $f(\alpha, \beta, z)$ в звездной области D , получим интегральную формулу

$$f(\alpha, \beta, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \varepsilon^{\gamma-1} d\varepsilon \int_C \frac{L_{\gamma}[f(\zeta)](1 - m\zeta)}{\zeta - \varepsilon z e^{-m(\varepsilon z - \zeta)}} d\zeta. \quad (7)$$

Пусть далее функция $f(\alpha, \beta, z) = e^{(\beta-\alpha)kz}$, k – действительное число и функция $g(z) = ze^{-mz}$, тогда $g(\zeta) = \zeta e^{-m\zeta}$, $g'(\zeta) = (1 - m\zeta) e^{-m\zeta}$, $L_{\gamma}[f(\zeta)] = L_{\gamma}[e^{(\beta-\alpha)k\zeta}] = (\gamma + (\beta-\alpha)k\zeta) e^{(\beta-\alpha)k\zeta}$. Подставляя в формулу (7), получим интегральную формулу

$$e^{(\beta-\alpha)kz} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \varepsilon^{\gamma-1} d\varepsilon \int_C \frac{(1 - m\zeta)(\gamma + (\beta-\alpha)k\zeta) e^{(\beta-\alpha)k\zeta}}{\zeta - \varepsilon z e^{-m(\varepsilon z - \zeta)}} d\zeta.$$

При $k = 1, m = 1, \alpha = 0, \beta = 1$ имеем интегральную формулу

$$e^z = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \varepsilon^{\gamma-1} d\varepsilon \int_C \frac{(1-\zeta)(\gamma+\zeta) e^\zeta}{\zeta - \varepsilon z e^{-(\varepsilon z - \zeta)}} d\zeta,$$

которая выражает функцию $f(z) = e^z$ через функцию $g(z) = ze^{-z}$ на границе C области D [3].

Пусть функция $g(z) = e^{kz}$, тогда $g(\zeta) = e^{k\zeta}$, а $g'(\zeta) = ke^{k\zeta}$. Подставляя в формулу (6) для произвольной голоморфной функции $f(\alpha, \beta, z)$ в звездной области D , получим интегральную формулу

$$f(\alpha, \beta, z) = \frac{k}{2\pi i} \int_\alpha^\beta \varepsilon^{\gamma-1} d\varepsilon \int_C \frac{L_\gamma[f(\zeta)]}{1 - \varepsilon z e^{k(\varepsilon z - \zeta)}} d\zeta.$$

Пусть далее функция $f(\alpha, \beta, z) = (\beta - \alpha) ze^{-(\beta-\alpha)mz}$, а функция $g(z) = e^{kz}$. Тогда, в силу формулы (6), получим интегральную формулу

$$ze^{-(\beta-\alpha)mz} = \frac{k(\beta-\alpha)}{2\pi i} \int_\alpha^\beta \varepsilon^{\gamma-1} d\varepsilon \int_C \frac{e^{-(\beta-\alpha)m\zeta} (\gamma\zeta + 1 - (\beta-\alpha)m\zeta)}{1 - \varepsilon z e^{k(\varepsilon z - \zeta)}} d\zeta.$$

При $k=1, m=1, \alpha=0, \beta=1$ имеем ранее полученную интегральную формулу [3]

$$z = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \varepsilon^{\gamma-1} d\varepsilon \int_C \frac{e^{z-\zeta} (\gamma\zeta + 1 - \zeta)}{1 - \varepsilon z e^{\varepsilon z - \zeta}} d\zeta.$$

Пусть на границе C области D имеется некоторая совокупность точек M положительной меры, которую называют множеством единственности голоморфной функции $f(z)$. Тогда можно поставить задачу о нахождении такого аналитического выражения, которое позволило бы представить значения голоморфной функции $f(z)$ внутри области D по известным ее значениям на множестве $M \subset C$. Подробнее о решении этой задачи и результатах, которые носят названия обобщенных формул Карлемана или их аналогов, можно найти в статьях автора [2–5]. Интегральная формула Коши (5) может служить основой получения обобщенной интегральной формулы Карлемана.

Построим вспомогательную функцию $\varphi(z)$, которая удовлетворяет условиям: $\varphi(z)$ – голоморфная и ограниченная функция в области D , имеющая непрерывную производную первого порядка в замкнутой области \bar{D} , $|\varphi(z)| = 1$ почти всюду на $C \setminus M$, $|\varphi(z)| > 1$ в области D .

ТЕОРЕМА 3. Для голоморфной функции $f(z)$ в области D и ее непрерывной производной первого порядка в \bar{D} , произвольного множества $M \subset C$ положительной меры, функции $\varphi(z)$, голоморфной функции $g(z)$ в области D и любой точки $z \in D$ имеет место интегральная формула



$$f(\alpha, \beta, z) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \varepsilon^{\gamma-1} d\varepsilon \int_M \frac{(L_{\gamma}[f(\zeta)] + \zeta \tau f(\zeta) \ln \phi'(\zeta)) g'(\zeta)}{g(\zeta) - g(\varepsilon z)} \left(\frac{\phi(\zeta)}{\phi(z)} \right)^{\tau} d\zeta, \quad (8)$$

где $\tau > 0$ – любое действительное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть точка $z \in D$. Тогда точки $(\varepsilon z) \in D$ при любых $\varepsilon \in [\alpha; \beta]$. Рассмотрим функцию $f(z)(\phi(z))^{\tau}$, которая голоморфна в области D . Для нее, в силу условий теоремы, имеет место обобщенная интегральная формула Коши

$$f(\alpha, \beta, z)(\phi(z))^{\tau} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \varepsilon^{\gamma-1} d\varepsilon \int_C \frac{(L_{\gamma}[f(\zeta)(\phi(z))^{\tau}] g'(\zeta)}{g(\zeta) - g(\varepsilon z)} d\zeta. \quad (9)$$

Учитывая, что $L_{\gamma}[f(\zeta)(\phi(z))^{\tau}] = (L_{\gamma}[f(\zeta)] + \zeta \tau f(\zeta) \ln \phi'(\zeta))(\phi(z))^{\tau}$, разделим обе части формулы (9) на $(\phi(z))^{\tau}$ и представим правую ее часть в виде суммы двух интегралов по множеству M и множеству $C \setminus M$. Имеем

$$f(\alpha, \beta, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \varepsilon^{\gamma-1} d\varepsilon \int_M \frac{L_{\gamma}[f(\zeta)] + \zeta \tau f(\zeta) \ln \phi'(\zeta)}{g(\zeta) - g(\varepsilon z)} \left(\frac{\phi(\zeta)}{\phi(z)} \right)^{\tau} g'(\zeta) d\zeta + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \varepsilon^{\gamma-1} d\varepsilon \int_{C \setminus M} \frac{L_{\gamma}[f(\zeta)] + \zeta \tau f(\zeta) \ln \phi'(\zeta)}{g(\zeta) - g(\varepsilon z)} \left(\frac{\phi(\zeta)}{\phi(z)} \right)^{\tau} g'(\zeta) d\zeta.$$

Перейдем в полученной формуле к пределу при $\tau \rightarrow +\infty$. Интеграл по множеству $C \setminus M$ обращается в нуль, так как $\left(\frac{\phi(\zeta)}{\phi(z)} \right)^{\tau} \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow +\infty$ в силу условий для функции $\phi(z)$. Тем самым окончательно получим обобщенную интегральную формулу Карлемана (8).

Заметим, что интегральная формула (8) может быть записана без знака предела. Приведем без вывода окончательный вид формулы (8). Имеем

$$f(\alpha, \beta, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \varepsilon^{\gamma-1} d\varepsilon \int_M \frac{L_{\gamma}[f(\zeta)]}{g(\zeta) - g(\varepsilon z)} g'(\zeta) d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \varepsilon^{\gamma-1} d\varepsilon \int_M \frac{\zeta f(\zeta) \ln'(\phi(\zeta))}{g(\zeta) - g(\varepsilon z)} g'(\zeta) d\zeta + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} d\tau \int_{\alpha}^{\beta} \varepsilon^{\gamma-1} d\varepsilon \int_M \frac{L_{\gamma}[f(\zeta)] \ln \phi(\zeta) \phi^{-1}(z) + \zeta f(\zeta) \ln' \phi(\zeta) \ln e \phi(\zeta)^{\tau} \phi(z)^{-\tau}}{g(\zeta) - g(\varepsilon z)} \left(\frac{\phi(\zeta)}{\phi(z)} \right)^{\tau} g'(\zeta) d\zeta.$$

Пусть функция $g(z) = ze^{-mz}$, где $m \geq 0$ – действительное число. Подставляя в формулу (8) для произвольной голоморфной функции $f(z)$ в звездной области D , получим интегральную формулу

$$f(\alpha, \beta, z) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \varepsilon^{\gamma-1} d\varepsilon \int_M \frac{(L_{\gamma}[f(\zeta)] + \zeta \tau f(\zeta) \ln \phi'(\zeta))(1 - m\zeta)}{\zeta - \varepsilon z e^{-m(\varepsilon z - \zeta)}} \left(\frac{\phi(\zeta)}{\phi(z)} \right) d\zeta.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Интегральная формула (8) и последующие формулы при $\alpha = 0, \beta = 1$ совпадают с формулами из работы автора [5].

Список литературы

1. *Баврин И.И.* Операторы и интегральные представления. – М., 1974. – 99 с.
2. *Краснощеков А.Л.* Обобщенные интегральные формулы голоморфной функции // Комплексный анализ и математическая физика: сборник научных трудов, посвященный 100-летию со дня рождения проф. А.А. Темлякова. – М., 2003. – С. 149 – 153.
3. *Краснощеков А.Л.* О задаче локального обращения и обобщенных интегральных формулах Коши и Карлемана // Вестник Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета. Электронный научный журнал. Серия: Физико-математические и естественные науки. Пермь, 2014. – Вып. 2. – С. 64 – 71.
4. *Краснощеков А.Л.* Одномерные обобщенные интегральные формулы Коши и Карлемана голоморфной функции // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Киров, 2015. – Вып. 17. – С. 84 – 89.
5. *Краснощеков А.Л.* Обобщенные интегральные формулы голоморфной функции в звездной области пространства C^1 // Вестник Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета. Электронный научный журнал. Серия: Физико-математические и естественные науки. Пермь, 2015. – Вып. 1 – 2. С. 88 – 93.
6. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.

Электронное научное издание

**ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

Серия № 2

Физико-математические и естественные науки

ВЫПУСК 1–2, 2016

Электронный научный журнал

Ответственный редактор

Полежаев Денис Александрович

Ответственный секретарь

Селиванов Алексей Евгеньевич

Редактор *М.Н. Афанасьева*
Компьютерная верстка *Д.Г. Григорьева*

Свидетельство о государственной аккредитации вуза

№ 0902 от 07.03.2014

Изд. лиц. ИД № 03857 от 30.01.2001

Усл. печ. л. 4,1. Уч.-изд. л. 3,1

Редакционно-издательский отдел
Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета
614990, г. Пермь, ГСП, ул. Сибирская, 24, корп. 2, оф.71
тел. (342) 238-63-12
e-mail: rio@pspu.ru